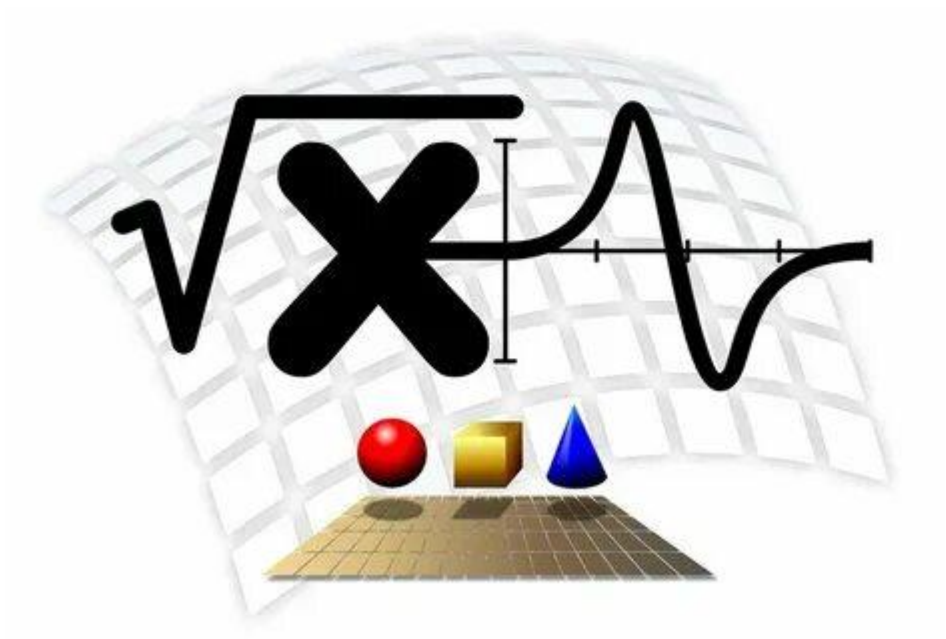
O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

OLIY MATEMATIKA

(o'quv qo'llanma)



Ushbu o'quv qo'llanma 60310100–Iqtisodiyot (tarmoqlar va sohalar bo'yicha) 60710200 – Biotexnalogiya (taqmoqlar bo'yicha) 60730400 – Muhandislik kommunikatsiyalari qurilishi va montaji (turlari bo'yicha), 60730300 – Qurilish (bino va inshootlarni loyihalash, qurish) yo'nalishlarda tayyorlanadigan mutaxassisliklarga ajratilgan va o'quv soatiga muljallangan.

O'quv qo'llanma ikki bobdan iborat bulib, fan silabusida keltirilgam mavzularni qamrab oladi.

Yuqorida ko'rsatilgan yo'nalishlarda taxsil olayotgan bo'lajab kichik mutaxassislar egallashi kerak bo'lgan matematik bilimlarni hisobga olib iloji boricha o'quv qo'llanmada kasbiy bilimlar va matematik kompetentlikning bir biriga bog'liq jihatlarini namunaviy misollarda keltirganmiz. O'quv qo'llanma o'quv dasturidagi ma'ruzalarni to'la qamrab olganligi uchun uni o'quv qo'llanma sifatida foydalanish mumkin. O'quv qo'llanma ko'p yillar davomida sinovdan o'utgan va ijobiy baholangan o'zbek va rus tillaridagi adabiyotlardan keng foydalanildi.

Fanni chuqurroq o'rganishni xohlagan talabalar uchun kitob ohirida yetarlicha to'liq adabiyotlar ro'yhati keltirildi. O'quv qo'llanmani bayon kilish jarayonida isboti keltirilmagan tasdiqlar isbotini o'rganish uchun adabiyotlar ko'rsatilgan.

Muallif

M U N D A R I J A.

Содержание.

Content.

1 OLIY MATEMATIKA VA UNING PRIDMETI. TO’PLAM, TO’PLAMLAR NAZARIYASI

Reja

1. Matematika fanining vujudga kelishi.
2. Oliy matematika predmeti, maqsad va vazifalari.
3. To’plam, to’plamlar nazariyasi

1.1.Oliy matematika predmeti. Matematika **(**yunoncha *mathematike, mathema* - ilm, fan so’zidan**)-**moddiy dunyoning miqdoriy munosabatlari va fazoviy shakllari haqidagi fan.Shu bilan birga boshqa fanlardan farqli ravishda atrofimizdagi olamning faqat ayrim qirralarinigina harakterlab qolmasdan,uning xususiyatlarini eng umumiy va abstrakt tarzda o’rganadi.

Matematikani predmet sifatida o‘qitishda kasbiy yo‘naltirish o‘qitishning maqsadlaridan biri sifatida ham, bilimlar sifatini oshirishning muhim faktori sifatida ham xizmat qiladi. Matematikani kasbiy yo‘naltirib o‘qitish faqatgina kasbiy ko’nikmani oshiribgina qolmay, shu bilan birga talabalarning ma’naviy kuchlarini va kompetentligini ham rivojlantirishga, ularda ilmiy dunyoqarashni, ijobiy munosabatda bo‘lish kabi fazilatlarni shakllantirishga ham imkon beradi.

Qadimgi Misr va Bobilda matematik faktlar tarqoq holda bo’lgan bo’lsa, qadimgi Yunonistonda mantiqiy sistemaga solingan matematik bilimlar vujudga kela boshladi. Qadimgi yunon olimlari yaratgan elementar geometriyaning sistematik bayoni 2000 yil davomida matematikaning mantiqiy qurilishiga namuna bo’lib xizmat qildi. Qadimgi Yunonistonda matematikaning taraqqiyoti **Fales** (miloddan avvalgi VII-VI asrlar) va **Pifagor** (miloddan avvalgi VI asr) nomi bilan bog’liq. Pifagor falsafiy maktabining vakillari matematik bilimlarni to’plab sistemaga solishda, matematikaning ilk rivojlanishida katta o’rin tutdi. Jumladan, natural sonlarning xossalari, mukammal sonlar, bo’linish nazariyasi o’rganildi, geometriyada chizg’ich va sirkul bilan shakl yasash san’at darajasiga ko’tarildi.

Matematikaning rivojlanishiga eramizdan oldingi III asrda yunon olimi

Evklid yozgan (to'plagan) 5 tomdan iborat va "Boshlang'ich" deb atalgan kitoblarning ahamiyati katta bo'ldi.

Qadim ota-bobolarimizning matematikaning taraqqiyotiga dastlab bor narsalarni taqsimlash (masalan meros bo'lish) jarayonida, har bir shaxs yoki to'daning haqini ajratib berish hisobini olib borishgan. Turmush va hayotiy sharoitlar bunday hisoblar soni, sifatini oshirib borgan.

Al-Xorazmiy (787-850) Abdullo Muhammad ibn Muso al Majusiy "Hind hisobi" kitobini yozib arifmetika fanining asoschisi bo'lgan. Unda hozirda sizu-biz ya'ni butun dunyo foydalanadigan *o'nlik sanoq* sistemasi taklif qilingan. *Algebra* atamasi Xorazmiyning «Al-kitob al muxtasar fi hisob Al-jabr val-muqobala» (Al-jabr va-l-muqobala hisobi haqida qisqacha kitob) nomli risolasidagi "Al-jabr" so'zining lotincha yozilishidan olingan. Bizgacha yetib kelgan nusxasi 1342 yili ko'chirilgan arabcha nusxasidir. Al-Xorazmiyning bu asarida birinchi marta algebraik almashtirishlar, kvadrat tenglamalarni yechish va boshqa algebraik masalalarni sistematik bayon qildi. Matematikada algoritmlar qo'llash, geometriyaning Al-Xorazmiy ishlaridan so'ng keng tarqaldi. Algebraning geometriyaga tatbiqi Al-Xorazmiy ishlaridan so'ng keng tarqaldi**.**

Abu Rayxon (Beruniy) Muhammad Ibn Ahmad (973-1048) Evklidning "Nachalo", Ptolomeyning "Al'magest" asarlarini "sanskritdan" zamon tiliga aylantirgan "Astrolyabiya traktati", "Hindiston" asarlari bilan dunyoga mashhur geometr, faylasuf sifatida tanilgan.

Umar Xayyom (1048-1131) (Xayyom Abul Fatx Omar Ibn-Ibroxim) Samarqandda (Xurosondan haydalib) yashagan davrida "Algebra va-Al-muqobala asarlarining davomi haqida traktat", 1077 yili "Evklid asosiy postulatlari haqida kommentariylar" traktatini yozgan. Bularda egri chiziqli trapetsiya tushunchalariga asos solingan. U o'z asarlarida kubik tenglamalarni geometrik yo'l bilan mukammal tekshirdi.

Mirzo Ulug'bek (Muhammad ibn Shohrux ibn Temur Ulug'bek Ko'ragon), buyuk o'zbek astronomi va matematigi. Samarqandda rasadxona qurdirib, astronomik kuzatishlar olib bordi. Kuzatishlari asosida olamga mashhur bo’lgan “Ulug’bek ziji” degan astronomik jadval tuzdirgan. Uning rahbarligidagi Samarqand matematiklari Nyuton binomi formulasi, irratsional sonlar nazariyasi, tenglamalarni taqribiy yechish usullari va sonlar nazariyasining ayrim masalalarini ishlab chiqdilar.

Al Koshi G’iyositdin Jamshid ibn Masud (1394-1449) Ulug’bek observatoriyasida ishlagan, 1427 yilda “Arifmetika kaliti” asarini yozgan. O’z asarlarida ketma-ket yaqinlashish usuli bilan kubik tenglamani yechgan, muntazam ko’pburchaklarning perimetrlari yordamida aylana uzunligining diametriga nisbatining taqribiy qiymatini 17 xona aniqlik bilan hisoblagan.

1.2. Fanining maqsadi: talabalarning matematik bilimlarini oshirishdan iborat. Bu fan bakalavr tayyorlashning o’quv jarayonida talabalarning umummatematik tayyorgarligi va ko’pgina maxsus fanlar bo’yicha chuqur bilbm olishda

Fanining vazifalari: oliy matematika fani o’zining o’rganish qurollariga-apparatlariga ega hisoblanib. Shu apparatlarning xususiyatlarini, ta’sir sohalarini va tadbiq doiralarini o’rganuvchi qismlariga uning xususiy bo’limlari deymiz. Sizga taqdim etilayotgan matematika “Oliy matematika” deyiladi. U quyidagi qismlarni o’z ichiga oladi.

1. Chiziqli algebra va analitik geometriya elementlari.
2. Matematik analizga kirish.
3. Bir o’zgaruvchi funktsiyaning differensial hisobi.
4. Aniqmas va aniq integral hisob.
5. Oddiy differensial tenglamalar.
6. Sonli va funksional qatorlar nazariyasi.
7. Ko’p argumentli funksialar, ularning differensial hisobi.
8. Karrali va egri chiziqli integrallar.
9. Maydon nazariyasi elementlari.
10. Operatsion hisob, uning tadbiq elementlari.
11. Matematik fizika tenglamalari.
12. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika elementlari.

Talabalarga qo'yiladigan talablar: Talabalardan yuqorida qayd etilgan mavzularning kamida 88-90 % ni o'zlashtirish talab etiladi. Bunda: Vektorlar va ular ustida amallarni bajarish, to'g'ri chiziqning tekislikdagi va fazodagi tenglamalarini, ularga doir bo'lgan masalalarni yechish ishlari ko'zda tutilgan. Determinantlarni hisoblay olish, hosila va integralni hisoblay olish shart.

Fanni o'rganishda informatsion-metodik taminotlardan, internet malumotlardan keng foydalanilgan.

1.3. To'plamlar va uning elementlari. To'plamlar ustida amallar va ularning xossalari. Eyler-Venn diagrammalari. To'plamlarning to'g'ri (dekart) ko'paytmasi, akslantirish tushunchasi, to'plam quvvati haqida quyida to'liq ma'lumotlar keltiramiz.

To'plam tushunchasi matematikaning boshlang'ich tushunchalaridan bo'lib, u ta'rifsiz qabul qilinadi. To'plamni tashkil qiluvchi obyektlar uning elementlari deyiladi. To'plamlar lotin alifbosidagi katta harflar bilan bekgilanadi (*A,B,C,D…)*. To'plam bir qancha elementlardan iborat bo'lishi mumkin, quyidagi yozuv:

$$a \in A \qquad (1.2.1)$$

a elementni *A* to'plamga tegishliligini bildiradi.

$$a \notin A \qquad (1.2.2)$$

a elementni *A* to'plamga tegishli emasligini bildiradi, yoki mantiq belgisidan foydalangan holda $\neg(a \in A)$ ko'rinishda yozishimiz mumkin. Agar $a \in A$ bo'lsa, u holda *a* element *A* to'plamga tegishli deyiladi.

Hajmlilik Aksiomasiga ko'ra to'plam elementlarini quyidagicha belgilashimiz ham mumkin,

$$A = \{1, a, t, x\}, \qquad (1.2.3)$$

bunda, A to'plam tarkibida 1 soni va *a,t,x* harfiy belgilar kiradi.

To'liqlik Aksiomasiga ko'ra to'plam elementlari soni uning tarkibiga kiruvchi elementlar bilan aniqlanib ularning qanday tartiblanganiga bog'liq emas.

(1.2.3) A to'plam $\{a, x, 1, t\}$ to'plam bilan ham va $\{x, t, a, 1, 1, 1, t, a, t, x\}$ to'plam bilan ham bir xildir.

To'plamlar ustida amallar

Agar A va B to'plamlar bir xil elementlardan tashkil topgan bo'lsa bu to'plamlar teng deyiladi. U holda to'liqlik aksiomasiga ko'ra agar ikkita to'plam bir xil elemantlar jamlanmasidan tuzilgan bo'lsa ular teng bo'ladi. Masalan

Agar *A={1,2,3}={2,1,3}={3,1,2}* to'plamning har bir elementi B to'plamning ham elementi bo'lsa, A to'plam B to'plamning to'plamostisi deyiladi va $A \subset B$ yoki $A \subseteq B$ orqali belgilanadi.

Bu belgilshlardan birinchisi A to'plam B to'plamning qismi va $A \neq B$ ekanligini ikkinchisi esa A to'plam B to'plamning qismi bo'lib ular teng bo'lishi ham va teng bo'lmasligi ham mumkinligini bildiradi. Masalan $\{x,t\} \subset \{x,t,1\}$ Ixtiyoriy A to'plam uchun $A \subseteq A$ munosabat o'rinli bo'ladi.

Yuqoridagilarni matematik tilda quyidagicha yozish mumkin:

$$A \subseteq B \equiv (\forall x \epsilon A)(x \epsilon B) \quad A \nsubseteq B \equiv (\forall x \epsilon A)(\forall x \epsilon B) \wedge (A \neq B)$$

Bu yozuvda $\wedge$ yozuvi "va" ma'nosini bildiradi. Ba'zida ayrimlar $\subset$ belgisi o'rniga $\subseteq$ belgisini ayrimlar esa $\subsetneq$ belgisini ishlatadi. A $\subsetneq$ B bo'lganda A to'plam B to'plamning xos to'plam ostisi deyiladi.

Ixtiyoriy A to'plam uchun $\varnothing \subseteq A$, agar $A \neq \varnothing$ u holda $\varnothing \subsetneq A$.

A va B to'plamlarning ayirmasi deb, A to'plamning B to'plamga kirmagan barcha elementlardan tashkil topgan to'plamga aytiladi va $A \backslash B$ yoki A-B Ko'rinishlarda belgilanadi. A va B to'plamlarning ayirmasini mantiq qoidalariga ko'ra bunday yozamiz:

$$A - B = A \backslash B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

A va B to'plamlarning kamida biriga tegishli bo'lgan barcha elementlardan tashkil topgan $A \cup B$ to'plam A va B to'plamlarning birlashmasi yoki yig'indisi deyiladi. Buni matematik tilda quyidagicha yozamiz

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

Masalan:

A va B to'plamlarning kesishmasi yoki ko'paytmasi deb, A va B to'plamlarning barcha umumiy, ya'ni A ga ham, B ga ham tegishli elementlardan tashkil topgan $A\cap B$ to'plamga aytiladi. A va B to'plamlarning kesishmasi mantiq qoidalariga ko'ra bunday yozamiz:

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

Matematikaning ba'zi sohalarida faqatgina birorta to'plam va uning barcha to'plamostilari bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi. Masalan, planimetriya tekislik va uning barcha to'plamostilari bilan, stereometriya esa fazo va uning barcha to'plamostilari bilan ish ko'radi

Agar biror E to'plam va faqat uning to'plamostilari bilan ish ko'rsak, bunday E to'plamni universal to'plam deb ataymiz. Universal to'plamning barcha to'plamostilari to'plamini β (E) orqali belgilaymiz.

To'plamlar ustida bajariladigan algebraik amallar quyidagi xossalarga ega.

1^0. A $\cap$ A = A kesishmaning idempotentligi;

2^0. A $\cup$ A = A birlashmaning idempotentligi;

3^0. $\begin{matrix} A\cap B = B\cap A \\ A\cup B = B\cup A \end{matrix}$ kesishma va birlashmaning kommutativligi;

$4^0. 2^\circ$. $\begin{matrix} (A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C) \\ (A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C) \end{matrix}$ kesishma va birlashmaning assosiativligi

5^0. Kesishmaning birlashmaga nisbatan distributivligi:

$$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C);$$

6^0. Birlashmaning kesishmaga nisbatan distributivligi:

$$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C);$$

7^0. $(A\setminus B)\cap C = (A\cap C)\setminus B = (A\cap C)\setminus(B\cap C);$

$A_1 \cup A_2 \cup ... A_n \cup ...$ birlashmani $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $A_1 \cap A_2 \cap ... A_n \cap ...$ kesishmani $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ deb belgilab olsak, yana quyidagi xossalarga ega bo'lamiz. A_i, $i = 1...$ to'plamlar birorta X to'plamning to'plamostilari bo'lsin, u holda

8°. $X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(X \setminus A_i);$

9°. $X \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty}(X \setminus A_i).$

Bu tengliklarni isbotlash uchun, tengliklarning chap tomonidagi to’plamga tegishli ixtiyoriy element, tenglikning o’ng tomonidagi to’plamga tegishli va to’plamning chap tomonidagi to’plamga tegishli ixtiyoriy element chap tomonidagi to’plamga ham tegishli bo’lishini ko’rsatish etarli.

To’mlamlar ustida amallarni Eyler-Venn diagrammalari deb ataladigan quyidagi shakllar yordamida ifoda qilish, amallarning xossalarini isbot qilishni ancha engillashtiradi.

Universal to’plam to’g’ri to’rt burchak shaklida, uning to’plamostilarini to’g’ri to’rtburchak ichidagi doiralar orqali ifoda qilinadi. U xolda, ikki to’plam birlashmasi, kesishmasi, ayirmasi, to’lduruvchi to’plamlar, ikki to’plamning simmetrik ayirmasi mos ravishda quyidagicha ifodalanadi:

2. KOORDINATALAR USULI.

Reja:

1. To‘g‘ri chiziqda koordinatalar.Tekislikda Dekart koordinatalar sistemasi.
2. Kesmani berilgan nisbatda bo‘lish. Massalar sistemasining og‘irlik markazi.
3. Qutb koordinatalari sistemasi.
4. Fazoda Dekart koordinatalar sistemasi. Ikki nuqta orasidagi masofa.

2.1. To‘g‘ri chiziqda koordinatalar.Tekislikda Dekart koordinatalar sistemasi.

Matematik masalalarni o‘rganishda asosan ikki xil metod: geometrik va hisoblash yoki analitik metodlardan foydalaniladi.

Oliy matematikaning asosiy bo‘limlaridan biri hisoblangan analitik geometriyada, geometrik masalalar algebraik analiz vositalari yordamida tekshiriladi. Analitik geometriya geometrik va analitik metodlarning “koordinatalar metodi” deb atalgan yangi metod asosida o‘zaro boqlanishidan vujudga kelgan. Analitik geometriyaning vazifasi birinchidan, geometrik figuralarni nuktalarning geometrik o‘rni deb qarab, shu obrazlarning umumiy xossalariga asosan ularning tenglamalarini tuzish va ikkinchidan, tenglamalarning geometrik ma’nosini aniqlab, bu tenglamalar bilan ifodalangan obrazlarning shaklini, xossalarini va fazoda joylanishini o‘rganishdan iborat.

Odatda, chiziqlar nuqtalardan, sirtlar chiziqlardan, jismlar sirtlardan tashkil topgan deb qaraladi. Shuning uchun bu geometrik figuralarning eng soddasini nuqta deb olish va ularning fazodagi qolatlarini nuqtalarning geometrik o‘rni sifatida aniqlash tabiiydir.

Analitik geometriyada nuqtalarning chiziqdagi, tekislikdagi va fazodagi o‘rni sonlar yordamida aniqlanadi. Nuqtaning o‘rnini aniqlovchi sonlar uning koordinatalarideyiladi. Geometrik figuralarning o‘rnini koordinatalar yordamida aniqlash usuli yoki metodi - koordinatalar metodi deyiladi.

Analitik geometriya bo‘limi fizika, mexanika, atsronomiya, geodeziya kabi tabiiy fanlarda keng qo‘llaniladi.

Odatda kesma deyilganda to‘qri chiziqning ikki nuqtasi orasidagi qismi tushuniladi. Kesma uzunligi musbat son bo‘lib, u kesmani oldindan tanlangan biror masishtab birligi yordamida o‘lchangan kattalikdir.

Fizika va matematikaning juda ko‘p masalalarida kesmaning yo‘nalishini bilish muhim ahamiyatga egadir. Masalan, moddiy nuqtaning harakati qaysi punktdan boshlanib, qaysi punktda tugashini bilish harakatni o‘rganish uchun lozimdir.

Yo‘nalishi, ya’ni boshlanish nuqtasi A va tugash nukdasi V ma’lum bo‘lgan kesma shartli ravishda y o ‘ n a l g a n k e s m a deyilib, *AV* ko‘rinishda belgilanadi. Shuni qayd etib o‘tmoq kerakki, *AV* va *VA* kesmalar bir-biriga teng emas, chunki ularning yo‘nalishi qarama - qarshidir. Agar yo‘nalgan kesmalar bir to‘g‘ri chiziqda yoki parallel to‘g‘ri chiziqlarda joylashgan bo‘lsa, bu kesmalarning yo‘nalishi qarama-qarshi bo‘lib, ularni musbat (+) va manfiy (-) yo‘nalish deb belgilab olish maqsadga muvofiqdir. Musbat yo‘nalish bo‘ylab tanlangan to‘g‘ri chiziq o‘q deyiladi.

Biror o‘qdagi yo‘nalgan kesmaning musbat va manfiy ishora bilan olingan kattaligi kesma uzunligining algebraik kattaligi deyiladi.

Affin koordinatalar sistemasining $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$ bazis vektorlari ortogonal bazisni tashkil qilsa, ya'ni $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$, $|\vec{e}_1|=|\vec{e}_2|=1$ bo'lsa, u holda hosil bo'gan sistema dekart koordinatalar sistemasi deb yuritiladi. Bunday koordinatalar sistemasi (o, i, j) ko'rinishida belgilanadi. Bu yerda $i^2=j^2=1$, ij=0.

Dekart koordinat sistemasi affin koordinatalar sistemasining xususiy holi bo'lgani uchun affin koordinatalar sistemasiga nisbatan o'rinli mulohazalar dekart koordinatalar sistemasida ham o'z kuchini saqlaydi. Ammo dekart koordinatalar sistemada o'rni bo'lgan ba'zi mulohazalar affin koordinatalar sistemasida o'rinli bo'lavermaydi.

Tekislikda koordinatalari bilan berilgan $N_1(x_1,\ y_1)$ va $N_2(x_2,\ y_2)$ nuqtalar orasidagi masofa $N_1N_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ formula orqali topiladi.

1-misol. Uchlari A(1,2), B(0,5), C(-2,3) nuqtalarda bo'lgan uchburchakning medianalari kesishgan nuqtasining koordinatasini toping.

Yechish AD mediana bo'lsin, u holda D(x, y) nuqta BC tomon o'rta nuqtasi bo'lib $x_D=-1$, $y_D=4$, D(-1, 4) bo'ladi.

Uchburchak medianalar kesishgan nuqtasi O(x, y) bo'lsin, u holda

$$\frac{AO}{OD}=\lambda=2:1,\ \lambda=2$$

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\frac{1+2(-1)}{3}=-\frac{1}{3}$$

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\frac{2+2\cdot 4}{3}=\frac{10}{3}$$

Demak, $O(-\frac{1}{3},\ \frac{10}{3})$.

2.2. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish.

Tekislikni A va B nuqtalar va $\lambda \neq -1$ haqiqiy son berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Agar

$$\overrightarrow{AN}=\lambda\overrightarrow{NB} \qquad (2.2.1)$$

shart o'rinli bo'lsa, u holda N nuqta AB kesma berilgan λ nisbatda bo'ladi deyiladi. λ sonni uchta A, B, N nuqtalarning oddiy nisbati deyiladi va λ =(AB, N) ko'rinishda yoziladi.

Agar λ >0 bo'lsa, $\overrightarrow{AN}$ va $\overrightarrow{BN}$ vektorlar bir xil yo'nalgan bo'lib, $N \in \overrightarrow{AB}$ kesmada yotadi, agar λ <0 bo'lsa, $N \notin \overrightarrow{AB}$ bo'lib, $\overrightarrow{AN}$ va $\overrightarrow{BN}$ vektorlarning yo'nalishi har xil bo'ladi.

A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), N(x, y) nuqtalar berilgan bo'lsin. AB kesma berilgan λ nisbatda bo'luvchi N nuqtaning koordinatalarini topaylik.

$$\overrightarrow{AN}(x - x_1,\ y - y_1),\ \overrightarrow{NB}(x_2 - x,\ y_2 - y)$$

(2.2.1) formuladan foydalanib yozamiz.

$x-x_1=\lambda\,(x_2-x_1)$

$y-y_1=\lambda\,(y_2-y_1)$

Bundan:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \qquad (2.2.2)$$

(2.2.22) formula berilgan kesmani λ nisbatda bo'luvchi nuqta koordinatalarini topish formulasi deb yuritiladi.

Agar λ =1 teng bo'lsa, N nuqta berilgan kesmani teng ikkiga bo'ladi. Ya'ni

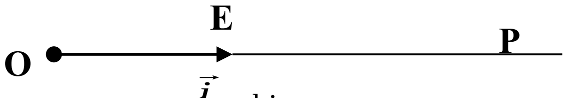
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad (2.2.3)$$

(2.2.3) formula kesmaning o'rta nuqtasini topish formulasi deb yuritiladi.

2.3.Tekislikda qutb koordinatalar sistemasi.

Geometriyada affin, to'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasi bilan bir qatorda qutb koordinatalar sistemasi ham qaraladi. Ko'plab tadqiqotlarda va egri chiziqning muhim sinflarini o'rganishda qutb koordinatalar sistemasidan foydalaniladi.

Yo’nalish tekislikda 0 nuqta va bu nuqtadan chiquvchi OP nur va OP nurda yotuvchi $\overrightarrow{OE} = \vec{i}$ birlik vektor berilgan bo’lsin (1- chizma).



1 - chizma

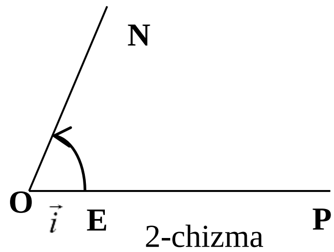
Hosil bo’lgan geometrik obraz qutb koordinatalar sistemasi deyiladi va *(0, i)* ko’rinishda belgilanadi.

O nuqtani qutb boshi, OP nur esa qutb o’qi deyiladi.

Tekislikda *(0, i)* qutb koordinatalar sistemasi va ixtiyoriy N nuqta berilgan bo’lsin, bu nuqtaning tekislikdagi vaziyatini ma’lum tartibda olingan ikkita son:

1) OE birlik kesma yordamida o’lchangan $\rho = |ON|$ masofa (2 - chizma).
2) OR nur ON nurning ustiga tushishi uchun burilishi kerak bo’lgan yo’nalishli $\varphi = (i \wedge ON)$ burchak bilan to’liq aniqlanadi.

ρ, N nuqtaning qutb radius φ esa N nuqtaning qutb burchagi deyiladi, ularni birgalikda N nuqtaning qutb koordinatalari deyiladi va (ρ, φ) ko’rinishda yoziladi. O nuqta uchun $\rho = 0$, φ - aniqlanmagan.



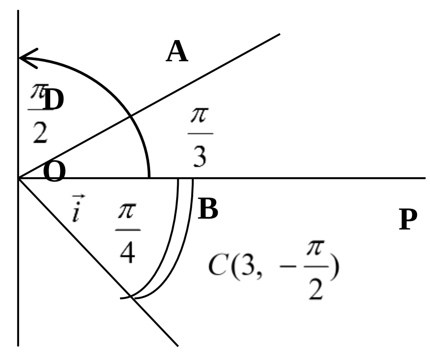
2-chizma

Agar $0 \le \rho < \infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$ o’zgarsa, tekislikni har bir nuqtasi qutb koordinatalar bilan ta’minlanadi.

1-misol. $A(2; \frac{\pi}{3})$, $B(1; 0)$, $C(3; \frac{\pi}{4})$, $D(1; \frac{\pi}{2})$ nuqtalarni qutb koordinatalar sistemasiga nisbatan tasvirlang.

3- chizmada berilgan nuqtalar tasvirlangan.

Ravshanki, har qanday (ρ, φ) juft haqiqiy sonlar uchun tekislikda bitta nuqta mavjud bo'lib, bu sonlar shu nuqtaning koordinatalari bo'ladi. Ammo bir nuqtaning o'ziga cheksiz ko'p sonlar mos keladi. Chunki, N nuqtaning koordinatalari $\rho = a > 0, \ \ \varphi = \alpha$ bo'lsa, $\rho = a, \ \varphi = \alpha + 2\pi k$ (bu yerda k=0, 1…) juftlari ham shu N nuqtaning koordinatalari bo'ladi, chunki ON



3 - chizma

nur OR qutb o'qini α burchakka qadar burishdan hosil bo'ladi deb olaylik, u holda OR nurni $\varphi = \alpha \pm 2\pi k$ qadar burishdan ham o'sha nurning o'zini hosil qilish mumkin.

1. Nuqtaning qutb va dekart koordinatalari orasidagi bog'lanish.

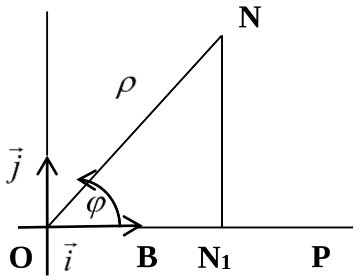
Tekislikda $(0, \vec{i})$ qutb koordinatalar sistemasi berilgan. Koordinatalar boshi qutb boshi bilan, absissalar o'qining musbat qismi qutb o'qi bilan ustma-ust tushadigan musbat yo'nalishli (0, $\vec{i}$, $\vec{j}$) dekart reperini kiritamiz (4-chizma).

Tekislikdagi N nuqtaning qutb koordinatalar ρ, φ dekart koordinatalari x, y bo'lsin.

To'g'ri burchakli ONN_1 uchburchakdan

$$x = \rho \cos\varphi$$
$$y = \rho \sin\varphi \qquad (2.3.1)$$

Nuqtaning qutb koordinatalari ma'lum bo'lsa, uning dekart koordinatalari (2.3.1) formuladan topiladi.



4-chizma

Agar N nuqtaning dekart koordinatalari ma'lum bo'lsa, uning qutb koordinatalarini ushbu

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad tg\varphi = \frac{y}{x} \Rightarrow \varphi = arctg\frac{y}{x};$$
$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{2.3.2}$$

formuladan topiladi.

N nuqtaning dekart koordinatalaridan qutb koordinatalariga o'tishda $tg\varphi = \frac{y}{x}$ formula qutb burchagini qiymatini to'liq aniqlamaydi, chunki buning uchun yana φ ning miqdori musbat yoki manfiy ekanligini ham bilish kerak. Odatda bu N nuqtaning qaysi chorakda joylashishiga qarab aniqlanadi. Masalan, yuqoridagi formulada foydalanib, x=3, y=3 bo'lsa, tgφ = 1 bo'lib, φ=45^0. Lekin, x=-3, u=-3 bo'lganda ham tgφ = 1 bo'lib, 45^0 emas, 135^0 bo'lishi kerak, chunki (-3; -3) nuqta uchinchi chorakda joylashgan φ burchakning qiymati va ishorasini cosφ, sinφ ga qarab aniqlash qulayroq.

Ikki nuqta orasidagi masofa.

Qutb koordinatalari bilan berilgan $N_1(\rho_1, \varphi_1)$ va $N_2(\rho_2, \varphi_2)$ nuqtalar orasidagi masofani hisoblash formulasini chiqaraylik.

Tekislikdagi N_1 va N_2 nuqtalarning dekart koordinatalari $N_1(x_1, y_1)$ va $N_2(x_2, y_2)$ bo'lsin. (2.3.1) formulaga ko'ra

$$\begin{matrix} x_1 = \rho_1\cos\varphi_1 \\ y_1 = \rho_1\sin\varphi_1 \end{matrix} \quad \text{va} \quad \begin{matrix} x_2 = \rho_2\cos\varphi_2 \\ y_2 = \rho_2\sin\varphi_2 \end{matrix}$$

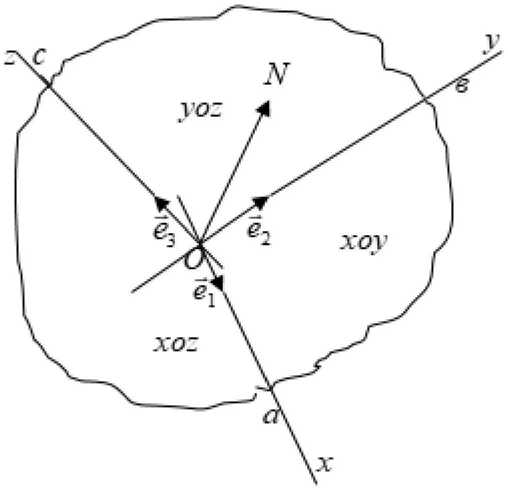
U holda

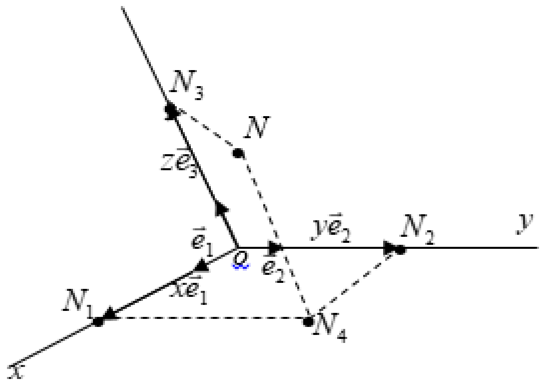
$$N_1N_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(\rho_2\cos\varphi_2 - \rho_1\cos\varphi_1)^2 + (\rho_2\sin\varphi_2 - \rho_1\sin\varphi_1)^2} = \sqrt{\rho_1^{\,2} + \rho_2^{\,2} - 2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \tag{2.3.3}$$

(2.3.3) qutb koordinatalar bilan ikki nuqta orasidagi masofani hisoblash formulasi.

2.4.Fazoda koordinatalar sistemasi, tekislikdka qanday kiritilgan bo'lsa, shunday kiritiladi

Fazoning ixtiyoriy O nuqtasiga qo'yilgan uchta $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ va $\vec{e}_3$ bazis vektorlar berilgan bo'lsin .





Bu vektorlar orqali o'tuvchi a, b va c to'g'ri chiziqlarni olamiz ($a \cap b \cap c = 0$).

Ta'rif. Musbat yo'nalishlari mos ravishda $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ va $\vec{e}_3$ vektorlar bilan aniqlangan a, b va c to'g'ri chiziqlardan iborat bo'lgan sistemani fazodagi affin koordinatalar sistemasi deyiladi va $(O, \vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)$ bilan belgilanadi.

O nuqtani koordinatalar boshi, $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ va $\vec{e}_3$ vektorlarni koordinata vektorlari deyiladi. *a* to'g'ri chiziqni *ox* bilan belgilab absissalar o'qi, *b* to'g'ri chiziqni *oy* bilan belgilab ordinatalar o'qi, c to'g'ri chiziqni esa oz bilan belgilab aplikata o'qi deb ataymiz. Bu o'qlarning har ikkitasi bilan aniqlangan uchta xoy, xoz, yoz tekisliklarni koordinata tekisliklari deyiladi.

$(O, \vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)$ - affin koordinatalar sistemasi, N - fazoning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. $\overrightarrow{ON}$ vektorni bazis $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektorlar yordamida yoyib yozish mumkin, ya'ni

$$\overrightarrow{ON} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \qquad (2.4.1)$$

Bu erdagi x, y, z haqiqiy sonlar $\overrightarrow{ON}$ vektorning $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazislarga nisbatan koordinatalari deyiladi va $\overrightarrow{ON}(x; y; z)$ ko'rinishda yoziladi. $\overrightarrow{ON}$ vektorning x, y, z koordinatalari N nuqtaning ham koordinatalari deyiladi. x soni N nuqtaning absissasi, y soni ordinatasi, z soni aplikatasi deyiladi va $N(x; y; z)$ ko'rinishda yoziladi.

Fazoda affin koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsa, u holda fazo nuqtalari to'plami bilan ma'lum tartibda olingan haqiqiy sonlar $(x, y, z) \in R^3$ uchliklari to'plami orasida biektiv moslik mavjud bo'ladi.

Agar $z=0$ bo'lsa, u holda N nuqta xoy koordinata tekisligida yotadi, chunki $\overrightarrow{ON}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2$, $\vec{e}_1$ va $\vec{e}_2$ vektorlar bir tekislikda yotadi. Shunga o'xshash $y=0$ bo'lsa, N nuqta xoz tekisligida yotadi, $x=0$ bo'lsa, N nuqta yoz tekisligida yotadi.

Agar $y=z=0$ bo'lsa, u holda N nuqta absissa o'qida yotadi, agar $x=z=0$ bo'lsa, u holda N nuqta ordinata o'qida, agar $x=y=0$ bo'lsa, u holda N nuqta aplikata o'qida yotadi, agar $x=y=z=0$ bo'lsa, u holda N nuqta koordinatalar boshi bilan ustma-ust tushadi.

Agar N nuqtaning x, y, z koordinatalari berilgan bo'lsa, $(O, \vec{e}_1\,\vec{e}_2\,\vec{e}_3)$ affin koordinatalar sistemasiga nisbatan N nuqtaning fazodagi vaziyatini (2.4.1) formuladan foydalanib aniqlasa bo'ladi. Koordinatalar boshidan $\overrightarrow{ON_1}=x\vec{e}_1$ vektorni qo'yamiz , undan keyin $\overrightarrow{N_1N_4}=\overrightarrow{ON_2}=y\vec{e}_2$ vektorni qo'yamiz, oxirida $\overrightarrow{N_4N}=\overrightarrow{ON_3}=z\vec{e}_3$ vektorni qo'yamiz. Vektorlarni qo'shish qoidasiga ko'ra, $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{ON_1}+\overrightarrow{N_1N_4}+\overrightarrow{N_1N}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3$. Shunday qilib, N nuqta izlangan nuqta. ON_1N_4N siniq chiziqni koordinata siniq chizig'i deyiladi. Demak, fazodagi N nuqtani yasash uchun uning koordinata siniq chizig'ini yasash kifoya.

Uchta koordinata tekisligi birgalikda fazoni sakkiz qismga ajratadi, ularning har biri oktanta deb ataladi. Quyidagi jadvalda oktantalar va undagi koordinatalarning ishoralari belgilangan.

Ikki nuqta orasidagi masofa.

Agar affin koordinatalar sistemasining koordinata $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektorlari o'zaro ortogonal va birlik vektorlar bo'lsa, u holda bunday affin koordinatalar sistemasini to'g'ri burchakli dekart yoki qisqacha dekart koordinatalar sistemasi deyiladi.

Boshi O nuqtada bo'lgan bunday koordinatalar sistemasini $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ bilan belgilaymiz (113-chizma), bu erda $\vec{i}^{\,2}=\vec{j}^{\,2}=\vec{k}^{\,2}=1$, $\vec{i}\vec{j}=\vec{i}\vec{k}=\vec{j}\vec{k}=0$.

Bu to'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasidan foydalanib, metrik masalalar yechiladi.

Namunaviy misollar

1-misol. Dekart koordinatalar sistemasida A(7, -7), N(-5, 12), P(3, 0) nuqtalar berilgan. Ularning qutb koordinatalarini toping?

Yechish Bu masalani yechishda (2.4) formuladan foydalanamiz.

$$A(7,\ -7),\ \rho = \sqrt{7^2 + (-7)^2} = 7\sqrt{2} \qquad tg\varphi = \frac{-7}{7} = -1,\quad \varphi = \frac{3\pi}{4}$$

$$N(-5;\ 12),\ \rho = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13 \qquad tg\varphi = -\frac{12}{5},\quad \varphi = arctg(-\frac{12}{5})$$

$$m(3;\ 0),\quad \rho = \sqrt{3^2} = 3 \qquad tg\varphi = \frac{0}{3} = 0,\quad \varphi = 0$$

2- misol. Uchlarini $A(5;\ \frac{\pi}{2}),\ B(8;\ \frac{5\pi}{6})$ va $C(3;\ \frac{7\pi}{6})$ nuqtalarda joylashgan uchburchakning muntazam ekanligini isbotlang.

Yechish Uchburchakning muntazam ekanligini isbotlash uchun AB=BC=AC ni isbotlash etarli. Buning uchun (2.3.3) formuladan foydalanamiz

$$AB = \sqrt{5^2 + 8^2 - 2\cdot 5\cdot 8\cdot \cos(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2})} = \sqrt{25 + 64 - 80\cdot \cos\frac{\pi}{3}} = \sqrt{89 - 80\frac{1}{2}} = \sqrt{49} = 7$$

$$AC = \sqrt{5^2 + 3^2 - 2\cdot 5\cdot 3\cdot \cos(\frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{2})} = \sqrt{25 + 9 - 30\cdot \cos(-\frac{2\pi}{3})} = \sqrt{25 - 30(-\frac{1}{2})} = \sqrt{49} = 7$$

$$BC = \sqrt{64 + 9 - 2\cdot 8\cdot 3\cdot \cos\frac{\pi}{3}} = \sqrt{73 - 24} = \sqrt{49} = 7$$

Demak, AB=AC=BC ekan, ABC uchburchak muntazam.

Bu va keyingi boblarda fazodagi geometriya bilan shug'ullanamiz, shuning uchun uch o'lchovli vektor fazo vektorlaridan foydalanamiz. Komplanar bo'lmagan ixtiyoriy uchta vektor bu fazoning bazis vektori bo'lishi ravshan.

3- misol $A(2;-5)$ va $B(-4;3)$ nuqtalarni tutashtiruvchi kesma uzunligini toping.

Yechish. 1) $A(2;-5)$ va $B(-4;3)$ nuqtalarni koordinata sistemasida yasaymiz.

2) A va B nuqtalarni to‘g‘ri chiziq kesmasi bilan tutashtiramiz..

3) $d = \sqrt{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2}$ formula yordamida $d = AB$ keama uzunligini topamiz:

$X_A = 2, X_B = -4$ ва $Y_A = -5, Y_B = 3$ larni e'tiborga olsak:

$$d = AB = \sqrt{(2-(-4)^2 + (-5-3)} = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10.$$

4- misol $A(7;-1), B(-2;2)$ va $C(-1;-5)$ nuqtalardan bir xil uzoqlashgan O_1 nutani toping.

Yechish. Masala shartidan $O_1A = O_1B = O_1C$ ekanligi kelib chiqadi. Izlanayotgan O_1 nuqta $(a;b)$ koordinatalarga ega bo'lsin $d = \sqrt{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2}$ formula yordamida quyidagilarni topamiz:

$$O_1A = \sqrt{(a-7)^2 + (b+1)^2};$$

$$O_1B = \sqrt{(a+2)^2 + (b-2)^2};$$

$$O_1C = \sqrt{(a+1)^2 + (b+5)^2};$$

Ushbu tenglamalar sistemasini tuzamiz.

$$\begin{cases} \sqrt{(a-7)^2 + (b+1)^2;} = \sqrt{(a+2)^2 + (b-2)^2;} \\ \sqrt{(a-7)^2 + (b+1)^2;} = \sqrt{(a+1)^2 + (b-5)^2;} \end{cases}$$

Tenglamalarning chap va o'ng tomonlarini kvadratga ko'taramiz:

$$\begin{cases} (a-7)^2 + (b+1)^2 = (a+2)^2 + (b-2)^2; \\ (a-7)^2 + (b+1)^2 = (a+1)^2 + (b+5)^2. \end{cases}$$

Qavslarni ochib, soddalashtirgandan so'ng

$$\begin{cases} -3a + b + 7 = 0, \\ -2a - b + 3 = 0. \end{cases}$$

Sistema hosil bo'ladi. va tenglamalar sistemasiga nisbatan yechsak. Bu sistemani a va b ga nisbatan yechsak $a = 2$ ва $b = -1$ ga ega bo'lamiz. Izlanayotgan nuqta $O_1(2;-1)$ bo'ladi. Bu A, B, C nuqtalardan o'tuvchi aylananing markazi bo'ladi**.**

5-masala. $\vec{a}(x; y; z)$ vektor uzunligini toping.

Yechish. $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ yozib olsak, u holda

$$|\vec{a}| = \sqrt{\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (3.1)$$

ga teng bo'ladi.

6-masala. $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ va $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ vektorlar berilgan. Ular orasidagi burchak kosinusini toping.

Yechish. $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$. Vektorlarning skalyar ko'paytmasidan

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \qquad (3.2)$$

7-masala. $N_1(x_1; y_1; z_1)$, $N_2(x_2; y_2; z_2)$ nuqtalar berilgan. Bu nuqtalar orasidagi masofani toping.

Yechish. Bu nuqtalar orasidagi masofani $\rho(N_1, N_2)$ bilan belgilaymiz. $\overline{N_1N_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

$$\rho(N_1, N_2) = \left|\overline{N_1N_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (3.3)$$

8-masala. Uchlari $A(7, 2, 4)$, $B(4, -2, 2)$, $C(6, -7, 8)$, $D(9, -1, 10)$ nuqtalarda bo'lgan to'rtburchakning kvadrat ekanligini isbotlang.

Isboti. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}\ \overrightarrow{AD}$, vektorlarning uzunliklarining tengliklarini va $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$ shartning o'rinli ekanligini ko'rsatish etarli.

$\overrightarrow{AB}(-3, -6, -2)$, $\overrightarrow{BC}(2, -3, 6)$, $\overrightarrow{CD}(3, 6, 2)$, $\overrightarrow{AD}(2, -3, 6)$.

Bundan $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right| = 49$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = -6 + 18 - 12 = 0$, demak $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$.

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $B(-5; 6)$ nuqtadan O_x o'qda yotuvchi A nuqtagacha bo'lgan masofa 10 ga teng. A nuqtani toping.

2. Ordinata o'qiga va $A(8; 6)$ nuqtagacha bo'lgan masofa 5 ga teng bo'lgan M nuqtani toping.

3. S nuqta AB kesmani (A dan B ga karab) 3:5 kabi nisbatda bo'ladi. Kesmaning uchlari $A(2; 3)$ va $B(10; 11)$ nuqtalardan iborat. S nuqtani toping.

4. Uchlari $A(11; 1)$ va $B(9; 11)$ bo'lgan kesma 2:3:5 kabi nisbatda (A dan B ga qarab) bo'lingan. Bo'linish nuqtalarini toping.

5. Kesma $A(4;6)$ va $B(1;3)$ nuqtalar bilan berilgan uzunligi AB kesmaning uzunligidan uch marta katta bo'lgan AC kesma hosil qilish uchun AB kesmani A dan Bga tomon qanday C nuqtagacha davom ettirish kerak.

6. Uchlari $A(5;4), B(-3;1)$ va $C(4;-2)$ nuqtalar bo'lgan uchburchak shaklidagi plastinkaning ogirlik markazini toping. (qalinlik hisobga olinmasin).

7. A (3;4) vaB (5;6) nuq talar AB kesmaning uchlari. AB ning o'rtasidagi M nuqtani toping.

8. M (2;1) vaN (4;3)nuqtalarni tutashtiruvchi kesma uzunligini toping.

9. . Kesmaning uchlari A (-4;8) vaB (7;-3) bo'lsaCnuqta kesmaning o'rtasi bo'lsa uni toping.

10. Uchburchakning uchlari berilgan A (3;2), B (-1;-1) vaC (11;-6) . Tomonlarning uzunligini toping.

3. BIRINCHI VA IKKINCHI TARTIBLI ALGEBRAIK CHIZIQLAR.

Reja:

1. Tekislikda to'g'ri chiziq va uning turli tenglamalari.
2. Ikkinchi tartibli chiziqlar (aylana, ellips, giperbola, parabola).

3.1. Tekislikda to'g'ri chiziq va uning turli tenglamalari.

Dekart koordinatalar sistemasidagi chiziqni ifodalashini ko'rdik.Endi xOy sistemadagi x va y o'zgaruvchilarga nisbatan istalgan birinchi tartibli tenglama tekislikda to'g'ri chiziqni ifodalashini ko'ramiz. Bunday tenglamaning umumiy ko'rinishi quyidagichadir:

$$Ax+By+C=0, \qquad (3.1.1)$$

bu yerda A, B, C lar o'zgarmaslar va shu bilan birga A va B bir paytda nolga teng bo'lolmaydi. Aytaylik, hech bo'lmaganda bitta $M_0(x_0, y_0)$ nuqtaning koordinatalari (3.1.1) tenglamani qanoatlantirsin:

$$Ax_0+By_0+C=0 \qquad (3.1.2)$$

(3.1.1) dan (3.1.2) ni ayirib,

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \qquad (3.1.3)$$

ko‘rinishdagi (3.1.3) ga teng kuchli tenglamani hosil qilamiz. Endi (3.1.1) yoki (3.1.3) to‘g‘ri chiziqning normal vektorini (to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar vektorni) $\vec{n}=\{A,B\}$ belgilab olaylik. $\vec{n}=\{A,B\}$ normal nol vektor emas, chunki *A* va *B* bir paytda nolga teng bo‘lolmaydi. Unda (3.1.3) tenglamani $\vec{n}=\{A,B\}$ va $\vec{r}=\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0, y-y_0\}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasi sifatida tahlil qilish mumkin. Bu vektorlar skalyar kupaytmasinipg nolga tengligi ularning ortogonalligini, perpendikulyarligini ko‘rsatadi. Istalgai *M(x, y)* nuqtaning koordinatalari (3.1.3) yoki (3.1.1) tenglamani $\vec{n}$ va $\vec{r}$ lar o‘zaro perpendikulyar vektorlar bo‘lolmaydi. Chunki $\vec{n}$ vektor faqat to‘g‘ri chiziqning istalgan bitta nuqtasiga perpendikulyar bo‘lishi mumkin. Shunday qilib, (3.1.3) va demak, (3.1.1) tenglama tekislikda to‘g‘ri chiziqni ifodalaydi. U to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi.

To’g’rii chiziqning umumiy tenglamasini tekshirish.

Agar (3.1.1) tenglamada *A*, *B*, *C* koeffitsientlar nolga teng bo‘lmasa, unga **to‘la tenglama** deyiladi. Aks holda, ya’ni *A*, *B*, *C* lardan birortasi nolga teng bo‘lsa, tenglama to‘la bo‘l-magan tenglama bo‘ladi. Hozir shu xususiy hollar bilan ta-nishib o‘tamiz.

1) *C=0;* tenglama *Ax+ By* =0 yoki $y=-\frac{A}{B}x$ ko‘rinishni olib, koordinata o‘qlarining boshidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqni aniqlaydi.

2) *B=0;* tenglama *Ax+C*=0 yoki $x=-\frac{C}{A}$ ko‘rinishni oladi. Agar $a=-\frac{C}{A}$ deb olsak, unda *x=a* tenglama *Ox* o‘qini *a* nuqtada kesuvchi *Oy* o‘qiga parallel (normali $\vec{n}=\{A,B\}$ *Oy* o‘qiga perpendikulyar) to‘g‘ri chiziqni aniqlaydi.

3) A=0, tenglama $By+C$=0 yoki $y=-\frac{C}{B}$ ko‘rinishni oladi. Agar $b=-\frac{C}{B}$ deb olsak, unda $y=b$ tenglama Oy o‘qini B nuqtada kesuvchi Ox o‘qiga parallel (normali $\vec{n}=\{O,B\}$ Ox o‘qiga perpendikulyar) to‘g‘ri chiziqni ifodalaydi.

4) $B=0$, $C=0$; tenglama Ax=0 yoki x=0 ko‘rinishni olib, bu Oy o‘qining tenglamasidir.

5) A=0 , S=0; tenglama $By=0$ yoki y=0 ko‘rinishni olib, bu Ox o‘qining tenglamasidir.

To‘g‘ri chiziqning kesmalar bo‘yicha tenglamasi.

To‘g‘ri chiziqning (3.1.1) ko‘rinishdagi umumiy tenglamasi $Ax+By+C$=0 da C koeffitsientni tenglikning o‘ng tomoniga o‘tkazib, hamma hadlarni -C ga bo‘lib chiqamiz: $-\frac{A}{C}x-\frac{B}{C}y=1$ yoki boshqacha yozsak, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1. \qquad (3.1.4)$$

Agar (3.1.4) tenglamadan $-\frac{C}{A}=a$ va $-\frac{C}{B}=b$ deb olsak a va b lar to‘g‘ri chiziqning mos ravishda Ox va Oy o‘qlari bilan kesishish nuqtalari, boshqacha aytganda mos ravishda Ox va Oy o‘qlaridan ajratgan kesmalarini ko‘rsatadi.

Unda (3.1.4) tenglamadan

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (3.1.5)$$

ko‘rinishni olib, u to‘g‘ri chiziqning kesmalar bo‘yicha tenglamasi deyiladi.

1-misol. Ox o‘qdan ajratgan kesmasi 3 va Oy o‘qdan ajratgan kesmasi -4 birlik bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

Echish: Masalaning shartiga ko‘ra

a=3, b=-4.Bularni (3.1.5) tenglamaga qo‘ysak, izlanayotgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi hosil bo‘ladi. $\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=1$ yoki $4x$-$3y$-$12=0$.

To‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi.

Berilgan to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan istalgan (noldan farqli) vektor shu to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori deyiladi.

Brilgan $M_1(x_1,\ u_1)$ nuqtadan o‘tuvchi va berilgan $\vec{q}=\{q_1,q_2\}$ vektorlar parallel (kollinear) bo‘lishi kerak. Bu vektorlarning parallelligi esa ularning koordinatalari proporsionalligini ko‘rsatadi, ya’ni

$$\frac{x-x_1}{q_1}=\frac{y-y_1}{q_2} \qquad (3.1.6)$$

Bu tenglama to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi deyiladi.

Agar yunaltiruvchi vektor $\vec{q}$ sifatida berilgan ikki $M_1(x_1,\ u_1)$ va $M_2(x_2,\ u_2)$ nuqtalardan o‘tuvchi $\vec{q}=\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1\}$ vektorlarni olsak, (3.1.6) tenglama

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (3.1.7)$$

ko‘rinishga keladi. Bu berilgan ikki M_1 va M_2 nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqnin tenglamasidir.

To’g’ri chiziq umumiy tenglamasini normal shaklga keltirish.

$Ax+By+C=0$ berilgan chiziq tenglamasi bo’lsin. Normal ko’paytuvchi

$\mu=\sqrt{A^2+B^2}$ ni topib, tenglamani unga bo’lamiz:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+\mathbf{B}^2}}x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0 \qquad (3.1.8)$$

Agar x va y larning koeffitsientlarini kvadtarlarga ko’tarib qo’shsak, berilgan tenglama hosil bo’lasi.

$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}=\cos\alpha,\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}=\sin\alpha,\ p=-\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$ ekanligiga iqror bo’lamiz.

Ikki to’g’ri chiziq orasidagi masofa

Aytaylik, ikki parallel to’g’ri chiziq normal tenglamalari bilan berilgan bo’lsin.

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p_1=0$$

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p_2=0$$

Demak, ular orasidagi masofa

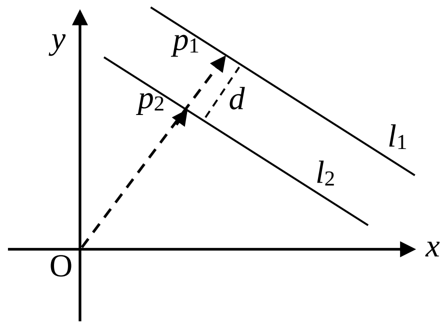
$$H = |p_1 - p_2| \qquad (3.1.9)$$

bo'ladi

Nuqta $M(x_0, y_0)$ dan $Ax + By + C = 0$ chiziqqacha masofa quyidagicha topiladi:

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| \qquad (3.1.10)$$

Haqiqatdan ham, shunday ekanligini isbotlash uchun M nuqtadan $Ax+By+C=0$ chiziqqa parallel chiziq o'tkazamiz. Uning tenglamasi:

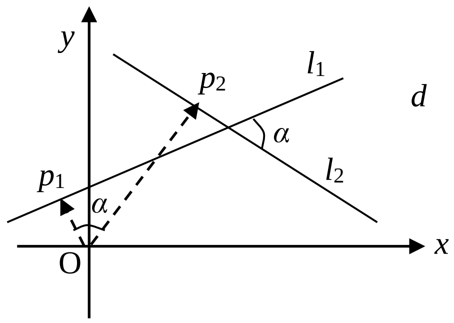


Bundan

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \Rightarrow Ax + by - (Ax_0 - By_0) = 0$$

$$d = |p_1 - p_2| = \left| \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} - \frac{-Ax_0 - By_0}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| = \left| \frac{C + Ax_0 + By_0}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| .$$

Tekislikdagi ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak quyidagicha topiladi:



$$\cos\alpha = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \qquad (3.1.11)$$

Haqiqatdan ham, agar $A_1x + B_1y + C_1 = 0(l_1)$va $A_2x + B_2y + C_2 = 0\ (l_2)$ berilgan ikki chiziq tenglamalari bo'lsa, $\overline{P_1}(A_1, B_1)$ va $\overline{P_2}(A_1, B_1)$ vektorlar shu ikki to'g'ri chiziq normallariga parallel vektorlardir. Bundan $\angle(\overline{P_1}, \overline{P_2}) = \angle(l_1, l_2)$ kelib chiqadi. Bu burchakni α deb belgilasak, ikki vektor orasidagi burchak formulasiga ko'ra yo'qoridagi formulaga ega bo'lamiz.

Xususiy holda

$$l_1 \| l_2 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \qquad (3.1.12)$$

$$l_1 \perp l_2 \Rightarrow \alpha = 90^0 \Rightarrow\ A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \qquad (3.1.13)$$

O'z navbatida (3.1.12) va (3.1.13) formulalar berilgan ikki to'g'ri chiziqnin mos ravishda parallelik va perpendikulyarlik shartlari deb aytiladi.

Burchak koeffitsienti tushunchasini kiritamiz. To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsienti deb, uning absissalar o‘qining musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan burchagining *tg* ga aytiladi va *k* bilan belgilanadi:

$$k = tg\varphi \qquad (3.1.14)$$

k ni to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori $\vec{q} = \{q_1, q_2\}$ yordamida $k = \frac{q_2}{q_1}$ ko‘rinishda ham yozish mumkin. (3.1.11) ni (3.1.14) formuladan foydalanib quyidagicha yozish mumkin:

$$y=kx+b \qquad (3.1.15)$$

Bu to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasidir. Agar (3.1.15) da b=0 bo‘lsa, u holda

$$y=kx \qquad (3.1.16)$$

ga ega bulamiz. (3.1.16) - koordinatalar boshidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar oilasini ifodalaydi. Agar (3.1.16) da k=0 bo‘lsa, unda $y=b$ bo‘lib, u absissalar o‘qiga parallel, ya’ni *Ox* o‘qi bilan kesishmaydigan to‘g‘ri chiziqni ifodalaydi.

Agar to‘g‘ri chiziqning (3.1.1) tenglamasini *y* ga nisbatan yechsak, u

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \qquad (3.1.17)$$

ko‘rinishni oladi. Agar bu erda $k = -\frac{A}{B}, b = -\frac{C}{B}$ belgilashlardan foydalansak, to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi uning burchak koeffitsientli $y=kx+b$ tenglamasi ko‘rinishga keladi. Bu erda *A* va *B* lar to‘g‘ri chiziq normal vektori $\vec{n} = \{A, B\}$ ning koordinatalaridir.

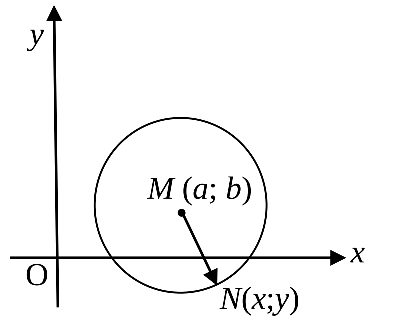
3.2. Ikkinchi tartibli chiziqlar: aylana, ellips, giperbola, parabola.

Yuqorida to’g’ri chiziqning umumiy tenglamasini $Ax+By+C=0$ deb yozdik. Bunda nuqtaviy koordinatalarni ifodalovhi *x*, *y* kattaliklar birinchi darajada ishtirok etadi. Shu sababli bu tenglamani 1- tartibli (chiziqli) tenglama deb ataymiz .

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (3.2.1)$$

tenglamada x^2, xy, y^2 ifodalar ikkinchi darajali ifodalardir. Shu sababli (3.2.1) tenglama ifodalovchi chiziqlarga ikkinchi tartibli egri chiziqlar deb aytamiz. Ikkinchi tartibli egri chiziqlarning eng sodda turlari: aylana, ellips, giperbola va parabolalardir.

I. <u>Aylana.</u> Markaz deb ataluvchi nuqtadan baravar uzoqlikda joylashgan nuqtalarning tekislikdagi geometrik o'rniga aylana deb aytamiz. Aytaylik, M(a,b) – markaz deb ataluvchi nuqta va N(x,y) -esa aylanaga taalluqli ixtiyoriy nuqta bo'lsin. Shartga ko'ra, MN$= const = R$. Iikki nuqta orasidagi masofa formulasiga asosan:



$$R = MN = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \Rightarrow \quad \Rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \qquad (3.2.2)$$

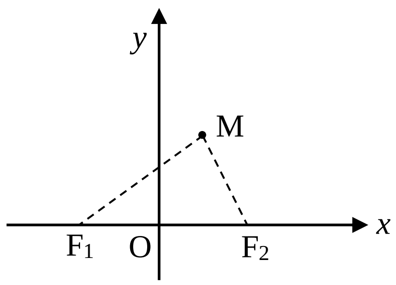
Bu markazi M nuqtada bo'lib, radiusi R bo'lgan aylana tenglamasidir. Xususiy holda M(a; b)=O (0;0) bo'lsa, aylana tenglamasi

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (3.2.3)$$

bo'ladi. (3.2.2) va (3.2.3) tenglamalar aylananing kanonik (eng sodda) tenglamasi deb aytiladi. Chunki, bularda markaz ham, radius ham bilinib turibdi. Qavslarni ochib, tartibga solsak,

$$x^2 + y^2 + px + qy + c = 0 \qquad (3.2.4)$$

hosil bo'ladi. Bu esa, aylananing umumiy tenglamasi deb aytiladi.



II. <u>Ellips.</u> Fokus deb ataluvchi ikki nuqtagacha bo'lgan masofalari yig'indisi o'zgarmas bo'lgan nuqtalarning tekislikdagi geometrik o'rnini ellips deb ataymiz. Jumla (ta'rifi) ni formulaga aylantirish uchun $F_1(-c;0) va F_2(c;0)$ nuqtalarni fokus nuqtalari deb atab, M(x,y) nuqtani ellipsga taalluqli bolsin deb qaraymiz. Ta'rifga ko'ra $F_1M + F_2M = const. F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ $F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

Hozircha $const = 2a$ deb belgilab tursak, quyidagi hosil bo'ladi.

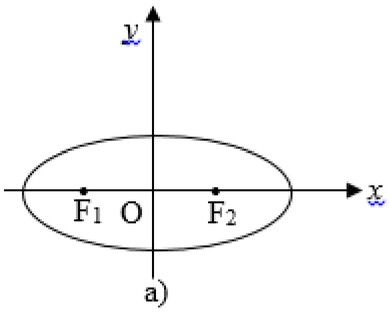
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

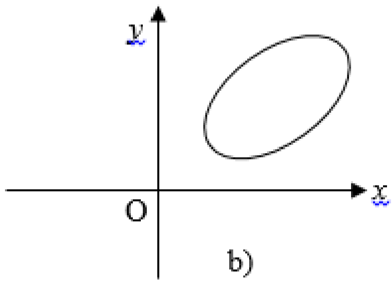
Agar tenglamani irratsionallikdan qutqarib, a^2-c^2=b^2 deb belgilasak,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \; c^2=a^2-b^2 \quad (3.2.5)$$

ifodaga ega bo'lamiz . $\left.\begin{array}{l} Agar\, x=\pm a \;\; \text{bo'lganda}, y=0 \\ y=\pm b \;\; \text{bo'lganda}, x=0 \end{array}\right\}$

kabi barcha cho'qqi nuqtalar holatini aniqlasak, (3.2.5) formula katta o'qi *2a* ga, kichik o'qi *2b* ga va fokus oralig'i *2c* ga teng bo'lgan ellips tenglamasi ekanligiga iqror bo'lamiz. Grafikda koordinata o'qlariga simmetrik ellips vujudga kelganini ko'ramiz, chunki biz bu fokuslarni *Ox* o'qiga va koordinata o'qiga simmetrik qilib tanlaganmiz.





Savol: (O'ylab ko'ring) Keyngi shakldagi ellipsning tenglamasi qanaqa bo'ladi?

III. <u>Giperbola.</u> Fokus deb ataluvchi ikki nuqtagacha bo'lgan masofalari ayirmasining moduli o'zgarmas bo'lgan nuqtalarning tekislikdagi geometrik o'rniga giperbola deymiz. F_1M-F_2M=*const*.

Yo'qoridagi II banddagi amallarni bajarsak,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (3.2.6)$$

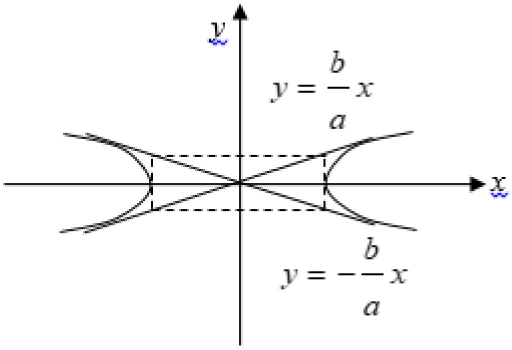
hosil bo'ladi. Bu, fokuslari $F_1(-c;0), F_2(c;0)$ nuqtalarda, haqiqiy o'qi *2a* va mavhum o'qi *2b* bo'lgan giperbola tenglamasidir, bu yerda $c^2-a^2=b^2$.

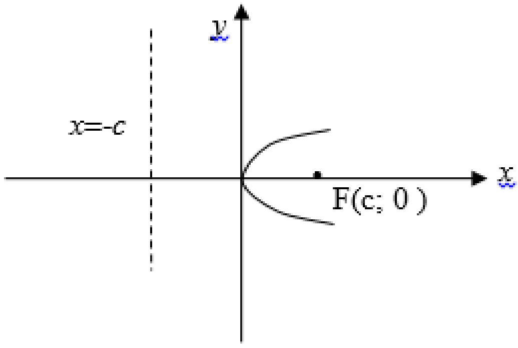
Uning grafigini to'la tasavvur qilish, ya'ni aniq chizish uchun tenglamasini quyidagi shaklga keltiramiz:

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \qquad (3.2.7)$$

Ko'rinib turibdiki ,aniqlanish sohasi $x^2-a^2\geq 0 - dankelibchiqadi(-\infty;-a)\cup\;(a;\infty)$.

$(-a;\;0)\;\; va\;\; (a;\;0)$ nuqtalar uning uchi bo'lib, grafigi simmetrik qanotlardan iborat bo’ladi.





$y = \pm\frac{b}{a}x$ chiziq bilan solishtirsak $\lim\limits_{x \to \infty} \left| \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \right| = 0$ bo'lib,

$$grafigi\ \ y = \frac{b}{a}x\ va\ y = \frac{b}{a}x \quad (3.2.8)$$

to’g’ri chiziq grafiklari orasida bo’ladi. $x \to \infty$ bilan (3.2.7) tenglama grafigi (3.2.8) tenglama grafigiga cheksiz yaqinlashib boradi, ammo unga xech qachon yetib ololmaydi, chunki $x^2 - a^2 < x^2$ shu sababli (3.2.8) ifodalovchi chiziqqa asimptotik (etaklovchi-ergashtiruvchi) chiziqlar deb aytiladi.

IV. <u>Parabola</u>. Fokus deb ataluvchi *F(c;0)* va direktrisa deb ataluvchi *x=c* tug’ri chiziqdan barobar uzoqlikda joylashgan nuqtalarning tekislikdagi geometrik o’rniga parabola deb ataymiz.

$$DM=MF \quad D(-c\ ,y) \quad DM=c+x \quad D(x,y) \quad F\ (c,0)$$

$$MF = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \qquad c^2 + 2cx + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$y^2 = 4cx$$

Ko’pincha , hisoblarda $2c = p\ \ deb\ \left(c = \frac{p}{2}\right)$ olib tenglamani

$$y^2 = 2px \qquad (3.2.9)$$

ko’rinishda yozadi va parabolaning kanonik tenglamasi deb yuritiladi. Bu *Ox* nisbatan bo’lgan egri chiziqdir.

Namunaviy misollar yechimi

1-misol. Markazi $O_1(2;-3)$ nuqtada, radiusi 2 ga teng aylana tenglamasini tuzing.

Yechilishi. $a = 2, b = -3, r = 2$ larni $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ ga qo‘yamiz:

$(x-2)^2+(y+3)^2=4,\ \ x^2-4x+4+y^2+6y+9=4,\ \ x^2+y^2-4x+6y+9=0.$

(eslatma. Shaklni chizib ko‘rsatish kerak).

2- misol. Markazi $(5;-7)$ nuqtada bo’lgan va $(2;-3)$ nuqtadan o‘tadigan aylananing tenglamasini tuzing.

Yechilishi. Masala shartidan r radiusni ikki nuqta orasidagi masofa formulasidan topish mumkin:

$r=\sqrt{(5-2)^2+(-7+3)^2}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5.\ \ r=5.$

$a=5, b=-7, r=5$ larni $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ formulaga qo‘yamiz:

$(x-5)^2+(y+7)^2=5^2,\ \ x^2-10x+25+y^2+14y+49=25,$

$x^2+y^2-10x+14y+49=0.$

3- misol. $3x^2+3y^2-18x-10y-48=0$ aylananing koordinata o’qlari bilan kesishish nuqtalarini toping.

Yechilishi. Aylana O_x o’q bilan $y=0$ bo’lgan nuqtalarda kesishadi. Berilgan aylana tenglamasida y ni nolga tenglasak:

$3x^2-18x-48=0$ yoki $x^2-6x-16=0\ \Rightarrow x_1=-2; x_2=8.$ demak, aylana absissalar o’qi bilan $A(-2;0),\ \ B(8;0)$ nuqtalarda kesishar ekan.

Aylana tenglamasida $x=0$ deb olamiz:

$3y^2-10y-48=0\Rightarrow y_1=-\frac{8}{3}; y_2=6$ ni topamiz.

Demak, aylana O_y ukni $C(0;-\frac{8}{3})$ va $D(0;6)$ nuqtalarda kesib o‘tadi.

4- misol. Agar ellipsning ikkita uchi $A_1(-6;0)$ va $A_2(6;0)$ nuqtalarda, fokuslari esa $F_1(-4;0)$ va $F_2(4;0)$ nuqtalarda yotsa, uning tenglamasin tuzing.

Yechilishi. Shartga ko’ra $a=6, c=4$ (19) formula yordamida b ni topamiz.

$b^2=a^2-c^2=6^2-4^2=36-16=20;\ \ b^2=20.$

$a=6$ va $b^2=20$ ni $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ ga qo‘yamiz:

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$$

5- misol. Fokuslari $F_1(-4;0)$ va $F_2(4;0)$ nuqtalarda yotgan va ekssentrisiteti $e=0,8$ bo'lgan ellipsning tenglamasini tuzing.

Yechilishi. Shartga ko'ra $c=4,\ e=\frac{c}{a}=0,8.$ c-ning qiymatini qo'yib,

a-ni topamiz:

$$\frac{4}{a}=0,8;\ a=\frac{4}{0,8}=\frac{40}{8}=5,\ \ a=5.$$

$a=5, c=4$ ni (19)ga qo'yib, b-ni topamiz:

$b^2=a^2-c^2=5^2-4^2=25-16=9.$

$a=5, b^2=9$ ni (18) qo'yib, izlanayotgan tenglamani yozamiz:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

6- misol. Agar fokuslari O_x o'qida bo'lgan ellispning yarim o'qlarining yig'indisi 8 ga, fokuslari orasidagi masofa 8 ga teng bo'lsa, uning tenglamasini tuzing.

Yechilishi. Masala shartiga ko'ra $a+b=8,\quad c=4.\ a^2-b^2=c^2,$ dan $a^2-b^2=16$ bo'ladi. Ushbu sistemaga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases}a^2-b^2=16,\\ a+b=4.\end{cases}\begin{cases}(a-b)(a+b)=16,\\ a+b=8.\end{cases}\begin{cases}a-b=2,\\ a+b=8.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=5,\\ b=3.\end{cases}$$

$$a=5, b=3\rightarrow\ \ \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

7- misol. Fokuslari O_x o'qda bo'lib, xaqiqiy o'qi 16 ga, mavxum oqi esa 8 ga teng bo'lgan giperbolaning tenglamasini tuzing.

Yechilishi. Shartga ko'ra $2a=16,\quad 2b=8\Rightarrow a=8, b=4$, bularni (21)ga qo'ysak:

$$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{16}=1$$

Mustaqil yechish uchun misollar

1. Markazi $(\frac{1}{2};-\frac{3}{4})$ nuqtada va radiusi 2 ga teng bo'lgan aylananing tenglamasini tuzing va shaklni yasang.

2. $x^2+y^2-4x+2y-29=0$ aylana bilan $x-y-1=0$ to‘g‘ri chiziqning kesishish nuqtalarining koordinatalarini toping.

3. Absissalar o’qiga $A(3;0)$ nuqtada urinadigan va radiusi 6 ga teng bo’lgan aylananing tenglamasini tuzing.

4. $A(8;5)$ va $B(-1;-4)$ nuqtalardan o‘tadigan va markazi absissalar o’kida bo’lgan aylananing tenglamasini tuzing.

5. Agar fokuslari O_x ukda bo’lgan ellipsning o’qlari $2a=12$ va $2b=8$ berilgan bo’lsa, uning tenglamasini tuzing.

6. Agar ellipsning fokuslarini koordinatalari $(\pm 2;0)$ bo’lib, kichik o’qi 8 ga teng bo’lsa, bu ellipsning tenglamasini tuzing.

7. $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$ ellipsning $x^2+2y-14=0$ to‘g‘ri chiziq Bilan kesishish nuqtalarini toping.

8. $x+4y-28=0$ to‘g‘ri chiziqning $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$ ellips ichida joylashgan kesmasining uzunligini toping.

9. Agar giperbolaning uchlari $A_1(-3;0)$ va $A_2(3;0)$ nuqtalarda, fokuslari $(\pm 5;0)$ nuqtalarda bulsa, uning tenglamasini tuzing.

10. Fokuslari O_x o’qda bo’lgan giperbolaning yarim o’qlari (xaqiqiy va mavxum o’qlarini) yigindisi 14 ga va fokuslari orasidagi masofa 20 ga teng bo’lsa, uning tenglamasini tuzing.

4. KOMPLEKS SONLAR.

Reja:

1. Kompleks son tushunchasi. Kompleks sonning algebraik formasi.
2. Kompleks sonni geometrik tasvirlash. Kompleks sonlar ustida arifmetik amallar. Kompleks sonning moduli va argumenti
3. Kompleks sonning trigonometrik formasi.

4.1.Kompleks son tushunchasi. Kompleks sonning algebraik formasi

1.Ta’rif: x va y haqiqiy sonlar, i esa qandaydir bir simvol bo’lsa, $x+yi$

ifoda kompleks son deyiladi, bunda quyidagi shartlar qabul qilingan deb hisoblanadi:

1) $x + oi = x \qquad o + yi = yi \quad \textit{ва} \quad 1i = i \quad -1i = -i$

2) faqat $x = x_1 \quad y = y_1$ bo'lgandagina $x + iy = x_1 + iy,$ bo'ladi.

3) $(x + iy) + (x_1 + iy_1) = (x + x_1) + (y + y_1)i$

4) $(x + iy)\cdot(x_1 + y_1 i) = (xx \ - yy_1) + (xy_1 + x_1 y_1)i$

Bundan $i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \; i^5 = i$ (1) va hakazo.

5) $x + yi$ kompleks sonda $x = 0 \quad y \neq 0$ bo'lsa, u mavhum son deyiladi, i son mavhum birlik deyiladi

4.2. Kompleks sonni geometrik tasvirlash. Kompleks sonlar ustida arifmetik amallar. Kompleks sonning moduli va argumenti.

Kompleks sonlarni qo'shish, ayirish, kupaytirish amallari, shu amallarni ko'phadlilar ustida bajarish qoidalari asosida bajariladi, bunda i sonning darajalari (1) formulalar bo'yicha almashtirish zarur.

1-misol: $(3 - 2i)^2 = 9 - 4i + (2i)^2 = 9 - 4i - 2 = 7 - 4i$

Kompleks sonlarni bo'lish; maxrajni va suratni qo'shmasiga ko'paytirish bilan hisoblanadi.

2-misol: $\dfrac{2i}{1+i} = \dfrac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{2i - i^2}{1 - i^2} = \dfrac{2i+1}{1+1} = \dfrac{2i+1}{2}$

4.3. Kompleks sonning trigonometrik formasi

$x + iy$ kompleks son ikki haqiqiy $M(x, y)$ son bilan aniqlanadi, shuning uchun ham u tekislikdagi $M(x, y)$ nuqta, yoki uning $\bar{r} = \bar{OM}$ radius vektor bilan ifodalanadi. Bu vektorning uzunligi $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ kompleks sonning moduli, vektor bilan *OX* o'q orasidagi φ burchak esa kompleks sonning argumenti deyiladi.

$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$ bo'lganligi uchun

Trigonometrik ko'rinishda berilgan kompleks sonlar ustida bajariladigan amallar:

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = (r\cdot r_1)[\cos(\varphi+\varphi_1) + i\sin(\varphi+\varphi_1)] \quad (4.3.1)$$

$$\frac{(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{r_1(\cos\varphi + i\sin\varphi_1)} = \frac{r}{r_1}[Cos(\varphi-\varphi_1) + iSin(\varphi-\varphi_1)] \quad (4.3.2)$$

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos\varphi + iSinn\varphi) \quad (4.3.3)$$

$$\int^n \sqrt{r(\cos\varphi + iSin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(Cos\frac{\varphi + 2K P\Pi}{h} + iSin\frac{\varphi + 2K\Pi}{h}\right) \quad (4.3.4)$$

bunda $K = 0;\ 1;\ \ 2;\ \ 3...............;(n-1)$

(4.3.3) va (4.3.4) formulalar **Muavr formulalari** deyiladi.

3-misol: Qo'yidagi kompleks son vektorlar bilan tasvirlansin va moduli, argumenti aniqlansin hamda trigonometrik ko'rinishda yozilsin.

$$z = z - zi$$

$$x = 2;\quad y = -2;\quad r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4+4} = 4\sqrt{2}$$

$$\varphi = arctg\frac{y}{x} = arctg\left(-\frac{2}{2}\right) = arctg(-1)$$

$$= \Pi - arctg1 = \Pi - \frac{\Pi}{4} = \frac{3}{4}\Pi \qquad \varphi = \frac{3}{4}\Pi \quad Z = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\Pi + iSin\frac{3}{4}\Pi\right)$$

Eyler formulasi: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + iSin\varphi$

4-misol. $Cosx + Cos2x + Cos3x + ... + Cosnx$ yig'indisi topilsin.

Eyler formulasiga asosan $Cosx = \dfrac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}$ va hakazo almashtirishlar bajaramiz.

$$\cos x+\cos 2x+\cos 3x+...+\cos nx=\frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}+\frac{e^{2xi}+e^{-2xi}}{2}+\frac{e^{3xi}+e^{-3xi}}{2}....\frac{e^{nxi}+e^{-nxi}}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(e^{xi}+e^{2xi}+e^{3xi}+....+e^{nxi}\right)+\left(e^{-xi}+e^{-2xi}+e^{3xi}+...+e^{-nxi}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{e^{xi}(e^{nxi}-1)}{e^{xi}-1}+\frac{e^{-xi}(e^{-nxi}-1)}{e^{-xi}-1}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{e^{xi}\cdot e^{\frac{nxi}{2}}\left(e^{\frac{nxi}{2}}-e^{-\frac{nxi}{2}}\right)}{e^{\frac{xi}{2}}\cdot\left(e^{\frac{xi}{2}}-e^{-\frac{xi}{2}}\right)}+\frac{e^{-xi}\cdot e-^{\frac{nxi}{2}}\left(e^{--\frac{nxi}{2}}-e^{\frac{nxi}{2}}\right)}{e^{-\frac{xi}{2}}\left(e^{-\frac{xi}{2}}-e^{\frac{xi}{2}}\right)}\right]=\frac{Sin\frac{nx}{2}\cdot Cos\frac{n+1}{2}x}{Sin\frac{x}{2}}$$

Kompleks sonning logarifmi uyidagicha yoziladi.

$$\ln z=\ln r+i\varphi_0+i2K\Pi \qquad (4.3.5)$$

$\varphi-$ ning $-\Pi\le\varphi\le\Pi$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi qiymati φ_o bo’ladi.

$\ln r+i\varphi_0$ ifoda logarifmning bosh qiymati deyiladi.

5. MATRITSALAR VA DETERMINANTLAR.

Reja:

1. Matritsalar. Matritsalar ustida amallar

2. Determinantlar va ularning xossalari.

3. Teskari matritsa.Matritsa rangi. Tatbiqlari.

5.1. Matritsalar. Matritsalar ustida amallar.

$a_{i\kappa}$ haqiqiy sonlar *m* ta satr va *n* ta ustunda joylashgan quyidagi to’g’ri to’rtburchak

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{n2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}=(a_{ij})$$

shaklidagi jadvalga *m*x*n* o’lchamli **matritsa** deyiladi. a_{ij} haqiqiy sonlar matritsa elementlari deb ataladi. Matritsalar odatda lotin alifbosining bosh harflari bilan belgilanadi. Matritsalar odatda $A=(a_{ij})_{m\times n}$ ko’rinishda belgilanadi.

*1*x*m* o’lchamli matritsaga **satr matritsa**, *n*x*1* o’lchamli matritsaga **ustun matritsa** deyiladi.

1-teorema. Nol satr yoki ustunga ega kvadrat matritsaning determinanti nolga teng.

2-teorema. Diagonal matritsaning determinanti asosiy diagonal elementlari ko'paytmasiga teng.

3-teorema. Uchburchak matritsaning determinanti asosiy diagonal elementlari ko'paytmasiga teng.

4-teorema. Kvadrat matritsa va unga transponirlangan matritsalar determinantlari teng.

5-teorema. Kvadrat matritsaning ikkita satr (ustun)lari o'rnini almashtirish natijasida determinant ishorasi o'zgaradi.

6-teorema. Ikkita bir xil satr (ustun)ga ega kvadrat matritsa determinanti nolga teng.

7-teorema. A kvadrat matritsaning biror bir satr (ustun) elementlarini noldan farqli λ skalyarga ko'paytirilsa, u holda A matritsaning determinanti λ skalyarga ko'paytiriladi.

8-teorema. Qandaydir ikkita satr (ustun)lari proporsional bo'lgan kvadrat matritsaning determinanti nolga teng.

9-teorema. Kvadrat matritsa i- qatori (ustuni)ning har bir elementi m ta qo'shiluvchilardan iborat bo'lsa, bunday kvadrat matritsaning determinanti m ta determinantlar yig'indisidan iborat bo'lib, birinchi determinant i- qatori (ustuni)da birinchi, ikkinchi determinantda ikkinchi qo'shiluvchilar va h.z. boshqa qatorlar A matritsanikidek bo'ladi.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a & a_{22}+b & a_{23}+c \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a & b & c \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

10-teorema. Kvadrat matritsaning biror-bir satr (ustun)iga noldan farqli skalyarga ko'paytirilgan boshqa satr (ustun)ni qo'shish natijasida determinant o'zgarmaydi.

11-teorema. Kvadrat matritsaning biror-bir satr (ustun)iga qolgan satr (ustun)lar chiziqli kombinatsiyasini qo'shish natijasida determinant o'zgarmaydi.

12-teorema. Kvadrat matritsaning biror-bir satri (ustuni) qolganlarining chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo’lsa, uning determinanti nolga teng.

13-teorema. Har qanday elementar matritsaning determinanti noldan farqli.

14-teorema. Kvadrat matritsalar ko’paytmasining determinanti berilgan matritsalar determinantlari ko’paytmasiga teng.

Matritsalar ustida amallarning xossalari.

Nol matritsa deb, har bir elementi nolga teng bo’lgan matritsaga aytiladi.

nxm o’lchamli A=(a_{ik}) va B=(b_{ik}) matritsalar berilgan bo’lsin. Agar matritsalarning barcha mos elementlari o’zaro teng bo’lsa, matritsalar o’zaro teng deyiladi va A=B ko’rinishda yoziladi.

O’lchamlari aynan teng A va B matritsalarni qo’shganda, ularning mos elementlari qo’shiladi: A + B = (a_{ik})+(b_{ik}) = (a_{ik}+ b_{ik}).

Haqiqiy son matritsaga ko’paytirilganda, matritsaning har bir elementi shu songa ko’paytiriladi: k (a_{ik}) = (k a_{ik}).

Misol. Amallarni bajaring:

$$2\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & -7 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Matritsalarniqo’shishvasongako’paytirishamallariquyidagixossalargabo’ysinadi: *1) A + B = B + A; 2) A + (B + C) = (A + B) + C; 3) k(A + B) = kA + kB; 4) k(nA) = (kn)A ; 5) (k + n)A = kA + nA.*

Agar A matritsaning ustunlari soni B matritsaning satrlari soniga teng bo’lsa, A va B matritsalar o’zaro zanjirlangan matritsalar deyiladi. O’zaro zanjirlangan matritsalarni ko’paytirish mumkin.

nxm o’lchamli A = (a_{ik}) matritsani mxp o’lchamli B = (b_{ik}) matritsaga ko’paytmasi nxp o’lchamli C = (c_{ik}) matritsaga teng bo’lib, uning c_{ik} elementlari quyidagicha aniqlanadi

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \,,$$

ya'ni c_{ik} element A matritsa *i*-satri elementlarining B matritsa *k*-ustuni mos elementlariga ko'paytmalarining yig'indisiga teng.

Masalan:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{pmatrix}$$

Matritsalarni ko'paytirish quyidagi xossalarga bo'ysinadi:

1. *(kA)B = k(AB);* *2. (A + B)C = AC + BC;*

3. A(B + C) = AB + AC; *4. A(BC) = (AB)C.*

Matritsalarning ko'paytmasi ko'paytuvchi matritsalar nolmas bo'li-shiga qaramasdan, nol matritsani berishi ham mumkin.

A va *B* matritsalarning ko'paytmasi hardoim o'rinalmashtirish qo-nunigabo'ysinavermaydi, ya'niumumanolganda $AB \neq BA$. $AB = BA$ tenglikni qanoatlantiruvchi *A* va *B* matritsalarga o'rin almashinuvchi matritsalar deyiladi.

Berilgan *nxm* o'lchamli *A* matritsaning har bir satri mos ustunlari bilan almashtirilsa, hosil bo'lgan *mxn* o'lchamli matritsaga *A* matritsaning **transponirlangan matritsa**si deyiladi va A^T ko'rinishda belgilanadi.

Matritsalar ko'paytmasi transponirlangani uchun quyidagi formula o'rinli: $(AB)^T = B^T A^T$.

Satrlari soni n ustunlari soni m ga teng bo'lgan matritsaga n–tartibli **kvadratik matritsa** deyiladi.

Kvadratik matritsaning quyidagi xususiy ko'rinishlari bir-biridan farqlaniladi:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ – yuqori uchburchakli matritsa**;**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ – quyi uchburchakli matritsa;

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{– diagonal matritsa;}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E \text{ - birlik matritsa.}$$

5.2. Determinantlar va ularning xossalari.

2x2- matrisaning determinanti quyidagicha hisoblanadi

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

1- misol. $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 5\cdot 6 - 3\cdot(-2) = 30 + 6 = 36.$

Shuningdek, 3x3- matrisaning determinanti quyidagicha hisoblanadi

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$= [a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}]$$

$F =< F;+,\cdot,-,^{-1},0,1>$ maydon va maydon ustida $F^{n\times n}$ kvadrat matritsalar to’plami berilgan bo’lsin.

1-ta’rif. Kvadrat matritsaning har bir satr va har bir ustunidan bittadan elementlar olib tuzilgan ko’paytmalarning algebraik yig’indisiga berilgan kvadrat matritsaning determinanti deyiladi.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ matritsaning har bir satr va har bir ustunidan

bittadan element olib tuzilgan n ta elementlar ko'paytmasi $a_{1\tau_1}\cdot\ldots\cdot a_{n\tau_n}$ bilan n-darajali o'rniga qo'yish $\tau=\begin{pmatrix}1 & \ldots & n\\ \tau(1) & \ldots & \tau(n)\end{pmatrix}$ larni birini ikkinchisiga mos qo'yuvchi o'zaro bir qiymatli moslik mavjud. Bu moslikdan n-tartibli kvadrat matritsaning determinantini aniqlashda foydalanamiz.

Uchinchi darajali o'rniga qo'yishlar to'plami $S_3=\{\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5\}$dagi o'rniga qo'yishlar quyidagicha:

$$\varphi_0=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\ \varphi_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\ \varphi_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\ \varphi_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},$$

$$\varphi_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\ \varphi_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}.$$

Uchinchi tartibli kvadrat matritsa determinanti $D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$ ni hisoblash uchun uchinchi darajali o'rniga qo'yishlar yordamida ko'paytmalar tuzamiz. Urniga qo'yishning ishorasi u yordamida hosil qilingan ko'paytmani qo'shish yoki ayirish kerakligini aniqlab beradi. Bundan quyidagi ifodani hosil qilamiz.

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Determinantlarning asosiy xossalari

1-xossa. Determinantda hamma satrlar mos ustunlar qilib yozilsa, ya'ni transponirlanganda, determinatning qiymati o'zgarmaydi.

Isboti. Bu xossani isbot etish uchun ushbu

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}&a_{31}\\a_{12}&a_{22}&a_{32}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{vmatrix}\qquad(3)$$

tenglikning to‘g‘riligini ko‘rsatish yetarli. Ammo (3) dagi har ikki determenantni uchburchak qoidasini qo‘llanib hisoblasak. Bir xil natijaga kelamiz.

2-xossa. Determinantning biror satridagi (yoki biror ustunidagi) barcha elementlar nolga teng bo‘lsa, bunday determinant nolga teng bo‘ladi.

Isboti. Ushbu

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

har ikki determenantni uchburchak qoidasini qo‘llanib hisoblasak har bir hadida nol qatnashadi. Bunday determinant nolga teng bo‘ladi.

3-xossa. Determinantda istalgan ikki satrni (yoki ikki ustunni) o‘zaro almashtirsak, determinantning faqat ishorasi o‘zgaradi.

Isboti. Bu xossaning to‘g‘riligiga berilgan determenantga va undan ikki satr yoki ikki ustunning o‘rnini almashtirishda hosil bo‘lgan determinantga uchburchak qoidasini bevosita qo‘llanish bilan ishonch hosil qilish mumkin. Jumladan, 1-va 3-ustunlarning o‘rnini almashtirsak, Ushbu

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}$$

tenglikka ega bo‘lamiz.

4-xossa. Ikki satri (yoki ikki ustuni) teng bo‘lgan, determinant nolga tengdir.

Isboti. (1) determinantning 1- va 2- satri elementlari mos ravishda bir-biriga teng bo‘lsin,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta .$$

Shu determinantdagi bu satrlar o‘rinlarini amlashtiramiz. U vaqtda, bir tomondan, 3- xossaga asosan determinantning qiymati o‘z ishorasini o‘zgartiradi. Lekin ikkinchi tomondan, o‘zaro almashtirilayotgan satrlar bir xil bo‘lgani uchun ularni o‘zaro almashtirish determinant qiymatini o‘zgartirmaydi. Demak, $\Delta = -\Delta$ tenglikka egamiz, bundan $2\Delta = 0$ yoki $\Delta = 0$ kelib chiqadi. Determinantning elementlari teng ikki ustunining o‘rinlarinialmashtirishga tegishli mulohazalar ham shunga o‘xshash yuritiladi.

5-xossa. Determinantning biror satridagi (yoki ustunidagi) barcha elementlarni aynan bitta songa ko‘paytirilsa, u holda determinant ham shu songa ko‘paytiriladi. Boshqacha aytganda, satrdagi (yoki ustundagi) barcha elementlarning umumiy ko‘paytuvchisini determinant belgisi ostidan chiqarish mumkin.

Isboti. Dyeterminintning, masalan, birinchi satri elementlari uning uchinchi satri elementlari bilan proporsional, ya’ni $a_{11} = ma_{31}, a_{12} = ma_{32}, a_{13} = ma_{33}$ munosabatlar o‘rinli bo‘lsin deylik. Bu munosabatlardan foydalanib, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ma_{31} & ma_{32} & ma_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Oxirgi determinantning birinchi va uchinchi satrlari elementlari bir hil bo‘lgani uchun 4-xossaga ko‘ra uning qiymati nolga teng.

6-xossa. Biror satridagi barcha elementlari boshqa bir satrining mos elementlariga proporsional bo‘lgan determinant nolga tengdir. Xuddi shunday ustunlar uchun ham o‘rinli.

Isboti. (3) determinintning, masalan, birinchi satri elementlari uning uchinchi satri elementlari bilan proporsional, ya’ni $a_{11} = ma_{31}, a_{12} = ma_{32}, a_{13} = ma_{33}$ munosabatlar o‘rinli bo‘lsin deylik. Bu munosabatlardan foydalanib, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ma_{31} & ma_{32} & ma_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = m \cdot 0 = 0.$$

Oxirgi determinantning birinchi va uchinchi satrlari elementlari bir hil bo‘lgani uchun 4-xossaga ko‘ra uning qiymati nolga teng. Qolgan hollarda ham mulohazalar shu kabi yuritiladi. 1.2.-natija isbot bo‘ladi

7-xossa. Agar determinantni *i*-satridagi barcha elementlar *k* ta qo‘shiluvchidan iborat bo‘lsa, u holda bu determinantni *k ta* determinantlarning yig‘indisi ko‘rinishida ifodalash mumkin bo‘lib, bunda ularning i -dan farqli barcha satrlari berilgan deteminantdagidek, i - satri esa birinchi determinantda birinchi qo‘shiluvchilardan ikkinchisida - ikkinchilaridan va h.k. tuzilgandir. Xuddi shunday, ustunlar uchun ham o‘rinlidir. Xususiy holda bitta satrga boshqa bir satrni (ustunni) qo‘shish (yoki undan ayirish) mumkin, ya’ni

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+c & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+d & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b & a_{13} \\ a_{21} & c & a_{23} \\ a_{31} & d & a_{33} \end{vmatrix}$$

8-xossa. Agar determinantning hech bo‘lmaganda bitta satri boshqa satrlari orqali chiziqli bog‘langan bo‘lsa, bu determinant nolga tengdir. Aksincha, agar *n*-tartibli $(n > 2)$ determinant nolga teng bo‘lsa, u holda uning hech bo‘lmaganda bitta satri boshqa satrlari orqali chiziqli ifodalangan bo‘ladi. Xuddi shunday ustunlar uchun ham o‘rinlidir.

9-xossa. Determinantda biror ustun (satr) ning hamma elemntlarini bitta m songa ko‘paytirib, bu ko‘paytmalarni boshqa ustun (satr) ning mos elementlariga qo‘shsak, determinantning qiymati o‘zgarmaydi.

Isboti. (3) determinintning qiymatini Δ deymiz, (3) determinintning bininchi satri elementlarini m ga ko‘paytirib, ikkinchi satri elementlariga mos ravishda qo‘shaylik (boshqa hollar uchun ham isbot shunga o‘xshash bo‘ladi). Ko‘rilayotgan holda

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ma_{11} & a_{22}+m_{12} & a_{23}+ma_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Bu determinant qiymatini Δ_* deb belgilaylik. Biz $\Delta = \Delta_*$ ekanini ko‘rsatishimiz lozim. 7-xossaga ko‘ra qo‘yidagiga egamiz:

$$\Delta_* = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ma_{11} & ma_{12} & ma_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta + 0 = \Delta .$$

5.3. Teskari matritsa. Matritsa rangi. Tatbiqlari

Kramer formulasi

$F = < F;+,\cdot,-,^{-1},0,1 >$ maydon va maydon ustida $F^{n\times n}$ matrisalar to'plami va

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ berilgan bo'lsin.

15-teorema. Kvadrat matritsaning determinanti nolga teng bo'lishi uchun uning satr (ustun)lari chiziqli bog'langan bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot. 1. Matritsaning satrlari chiziqli erkli bo'lsa, $|A| \neq 0$ ekanligini isbotlaymiz.

Agar berilgan kvadrat matritsaning satrlari chiziqli erkli bo'lsa, u holda uni elementar matritsalar ko'paytmasi ko'rinishida ifodalash mumkin, ya'ni $A = E_1 \cdot E_2 \cdot ... \cdot E_k$. U holda determinant xossalariga ko'ra

$|A| = |E_1| \cdot |E_2| \cdot ... \cdot |E_k|$ va $|E_i| \neq 0 (i = \{1,...,k\}$. Bundan $|A| \neq 0$.

To'g'ri teorema bilan teskari teoremaga qarama-qarshi teoremalar teng kuchli bo'lganligidan, $|A| = 0$ ekanligidan A matritsa chiziqli erkliligi kelib chiqadi.

2. A matritsaning satrlari chiziqli bog'liq bo'lsa, $|A| = 0$ ekanligini isbotlaymiz.

Satrlari chiziqli bog'liq matritsaning kamida bitta satri qolganlari orqali chiziqli ifodalanadi. Determinantlar xossalariga ko'ra $|A| = 0$.

1-misol. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

16-teorema. Har qanday kvadrat matritsa uchun quyidagi shartlar teng kuchli:

1. $|A| \neq 0$.

2. Matritsaning satr (ustun)lari chiziqli erkli.

3. A matritsa teskarilanuvchi.

4. A matritsa elementar matritsalar yordamida ifodalanadi.

17-teorema. A matritsaning rangi uning noldan farqli minorlarining eng yuqori tartibiga teng.

Isboti. Noldan farqli A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ matritsa berilgan bo'lsin, u holda uning rangi $r = r(A) > 0$. Matritsaning kamida bitta noldan farqli r tartibli minori mavjudligini isbotlaymiz.

$r = r(A) > 0$ bo'lganligi uchun, A matritsaning r ta chiziqli erkli satrlari bor. Shu satrlardan tuzilgan A matritsaning $B \in F^{r\times n}$ matritsaostisini tuzamiz

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \end{pmatrix},$$

bu matritsaning rangi $r(B) = r$. Matritsaning satr va ustun ranglari tengligidan $\rho(B) = r$. Demak, B matritsaning r ta chiziqli erkli ustunlari mavjud. B matritsaning r ta chiziqli erkli ustunlaridan tashkil topgan matritsaostisini C bilan belgilaymiz. U holda $C \in F^{r\times r}$ va $r(C) = r$. Yuqoridagi teorema shartlariga ko'ra, C matritsaning ustunlari chiziqli erkli bo'lganligi uchun $|C| \neq 0$.

Demak, C matritsa A matritsaning tartibi r ga teng bo'lgan noldan farqli minori bo'ladi.

Agar $k > r(A)$ bo'lsa, A matritsaning k tartibli har qanday minori nolga teng bo'ladi.

Haqiqatdan ham, $k > r(A)$ bo'lsa, A matritsaning har qanday k ta satri chiziqli bog'langan bo'ladi. Bundan A matritsaning har qanday ($k \times k$) tartibli qismmatritsasida satrlari chiziqli bog'langan bo'ladi va teoremaga ko'ra bunday qismmatritsalar determinanti, ya'ni A matritsaning k tartibli har qanday minori nolga teng.

2-misol. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ matritsa rangini minorlar yordamida aniqlang.

Yechish. Matritsa rangi haqidagi teoremaga ko'ra matritsaning noldan farqli minorlarini aniqlaymiz.

Matritsaning berilishidan, unda kamida bitta noldan farqli birinchi tartibli minor mavjud, masalan, $A_1=(1)$ matritsaostining determinanti 1ga teng, ya'ni $M_1=|1|=1\neq 0$.

Matritsaning $A_2=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ matritsaostining determinanti

$$M_2=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1-(-2)=3\neq 0.$$

Matritsaning $A_3=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matritsaostining determinanti

$$M_3=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1+0+1-0-0-(-2)=4\neq 0.$$

Matritsaning 4-tartibli minori berilgan matritsaning determinantidan iborat, uni hisoblaymiz:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 0 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Demak, berilgan matritsaning noldan farqli minorlari 1-tartibli, 2-tartibli va 3-tartibli. Ulardan yuqori tartibligi 3-tartibli minor bo'lganligi uchun, berilgan matritsaning rangi 3 ga teng.

3-ta'rif. A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ matritsaning a_{ij} elementining

A_{ij} $(i, j \in \{1,...,n\}$ algebraik to'ldiruvchilaridan iborat

$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ . & . & \dots & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$ matritsaga A matritsaga biriktirilgan

matritsa deyiladi.

18-teorema. Agar $|A| \neq 0$ bo'lsa, u holda A matritsa teskarilanuvchi va $A^{-1} = |A|^{-1} \cdot A^*$.

Isbot. 17.3-Laplas teoremasi va 17.4-teoremalarga ko'ra

$$A_i(A^*)^j = (a_{i1},...,a_{in)} \cdot \begin{pmatrix} A_{j1} \\ \vdots \\ A_{jn} \end{pmatrix} = a_{i1}A_{j1} + ... + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} |A, агар, i = j;| \\ 0, агар, i \neq j. \end{cases}$$

Ya'ni, $A \cdot A^* = \begin{vmatrix} |A| & 0 & ... & 0 \\ 0 & |A| & ... & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & ... & |A| \end{vmatrix} = |A| \cdot E$ ga ega bo'lamiz. Bundan $|A| \neq 0$ bo'lsa, $A \cdot (|A|^{-1} \cdot A^*) = E$ (1) hosil bo'ladi.

Xuddi shunday $A^* \cdot A = |A| \cdot E$ tenglikdan $|A| \neq 0$ bo'lsa, $(|A|^{-1} \cdot A^*) \cdot A = E$ (2) tenglikka ega bo'lamiz.

(1), (2) tengliklardan A va $|A|^{-1} \cdot A^*$ lar o'zaro teskari ekanligi kelib chiqadi, ya'ni $A^{-1} = |A|^{-1} \cdot A^*$.

Mustaqil yechish uchun misollar

1. 2-chi tartibli determinantlarni xisoblang:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$; v) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta \end{vmatrix}$.

2. 3-chi tartibli determinantlarni xisoblang:

a) $\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

6. CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASI VA UNI YECHISH USULLARI.

Reja:

1. Chiziqli tenglamalar sistemasi. Kramer usuli. Gauss usuli.
2. Chiziqli tenglamalar sistemasini teskari matritsa yordamida yechish.Tatbiqlari.

6.1.Chiziqli tenglamalar sistemasi. Kramer usuli. Gauss usuli.

1. *n* nomalumli *m* ta chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (6.1.1)$$

Ko'rinishga ega bo'lib, bunda a_{ij} $(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$, b_j lar biror R sonlar maydoniga tegishli sonlardir, x_i lar esa noma'lumlardan iborat. a_{ij} lar (6.1.1) sistemaning noma'lumlar oldidagi koeffisientlardir, b_j lar esa ozod hadlar deb ataladi. O'z-o'zidan ma'lumki, barcha $a_{ij}=0$ bo'la olmaydi, chunki bunday holda biz tenglamalar sistemalariga ega bo'la olmaymiz. Lekin $\forall b_j=0$ bo'lishi mumkin. Bunday holda (6.1.1) sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (6.1.2)$$

ko'rinishni oladi. Sistemadagi m va n lar uchun $m=n$ yoki $m\neq n$ bo'lishi mumkin.

1-Ta'rif. Agar (6.1.1) sistemada noldan farqli b_j (i=$\overline{1,m}$) mavjud bo'lsa, bu sistema bir jinsli bo'lmagan chiziqli tenglamalar sistemasi bo'ladi, barcha $b_j=0$ (i=$\overline{1,m}$) bo'lganda hosil bo'ladigan (6.1.2) sistema esa bir jinsli tenglamalar sistemasi deyiladi.

2-Ta'rif. (6.1.1) sistemaning har bir tenglamasini to'g'ri sonli tenglikka aylantiruvchi $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ to'plamga (6.1.1) sistemaning yechimi deyiladi.

3-Ta'rif. Yechimga ega bo'lgan sistema hamjoyli (birgalikda), yechimga ega bo'lmagan sistema esa hamjoysiz (birgalikda bo'lmagan) sistema deyiladi. Hamjoyli sistemaning o'zi yana 2 qismga , yani aniq va aniqmas sistemalarga bo'linadi.

4-Ta'rif. Yagona yechimga ega bo'lgan sistema aniq sistema, yechimlarining soni cheksiz ko'p bo'lgan sistema aniqmas sistema deyiladi

2. n noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \qquad (6.1.3)$$

Quyidagi diterminantni tuzamiz.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x1}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{xn}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n \end{vmatrix}$$

Bu yerda sistema diterminanti Δ (3) dagi noma'lumlarining koeffisiyentlaridan Δ_{xk} (k=$\overline{1,n}$) esa Δ da k- ustunli ozod hadlar ustuni bilan almashtirishdan hosil bo'ladi.

Agar $\Delta\neq 0$ bo'lsa (3) sistema birgalikda va yagona yechimga ega, ya'ni aniq sistema bo'ladi. Bu yechim

$$x_1=\frac{\Delta x_1}{\Delta}, \quad x_2=\frac{\Delta x_2}{\Delta}, \ \ldots\ x_n=\frac{\Delta x_n}{\Delta} \qquad (6.1.4)$$

formulalar bilan topiladi. Sistemani yechishning bu usuli Kramer qoidasi deyiladi.

Agar sistema diterminanti $\Delta = 0$ bo'lib: $\Delta x_1 = \Delta x_2 = ... = \Delta x_n = 0$ bo'lsa, (6.1.3) sistema cheksiz ko'p yechimlarga ega (aniqmas sistema); $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ lardan birortasi noldan farqli bo'lsa, sistema yechimga ega emas (birgalikda bo'lmagan sistema).

1. Chiziqli tenglamalar sistemalarini yechishning bir necha usuli mavjud. Ulardan biri noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish usulidir. Mazkur usuldan birinchi marta nemis matematigi K. Gauss foydalangani uchun bu usul Gauss usuli deb ham yuritiladi.

Quyidagi n ta noma'lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = a_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = a_m \end{cases} \quad (6.1.5)$$

Bunda $a_{ij} \in P, a_j \in P$ bo'lgani holda m=n, m>n, m<n bo'lishi mumkin. a_{ij}(i=$\overline{1,m}$) lardan kamida bittasi noldan farqli, aks holda noma'lumlar soni n dan kichik bo'lar edi. Faraz qilaylik, $a_{11} \neq 0$. (6.1.5) sistemaning birinchi tenglamasini ketma-ket $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$, $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$, … ,$-\frac{a_{m1}}{a_{11}}$ sonlarga ko'paytirib, natijalarni mos ravishda sistemaning ikkinchi, uchunchi. , m-tenglamalariga qo'shamiz. Unda (6.1.5) ga ekvivalent bo'lgan quyidagi sistema hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + ... + b_{2n}x_n = b_2 \\ \quad b_{32}x_2 + b_{33}x_3 + ... + b_{3n}x_n = b_3 \\ \quad .... \\ \quad b_{m2}x_2 + b_{m3}x_3 + ... + b_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (6.1.6)$$

Bunda

$b_{\mu i} = a_{\mu i} - \frac{a_{1\mu}}{a_{11}} a_{\mu 1}$, $b_\nu = a_\nu - \frac{a_1}{a_{11}} a_{\nu 1}$ ($\nu = \overline{2,m}$; $\mu = \overline{2,n}$; i=$\overline{2,n}$;).

(6.1.6) sistemaning bir qismi bo'lgan yangi

$$\begin{cases} b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + ... + b_{2n}x_n = b_2 \\ b_{32}x_2 + b_{33}x_3 + ... + b_{3n}x_n = b_3 \\ .... \\ .... \\ b_{k2}x_2 + b_{k3}x_3 + ... + b_{kn}x_n = b_k \end{cases} \qquad (6.1.7)$$

sistemani qaraymiz.(6.1.7) sistemada $k \leq m$ bo'ladi, chunki barcha koeffisiyentlari va ozod hadi nolga teng bo'lgan ba'zi bir tenglamalar sistemasidan tashlab yuboriladi. Agar biz (6.1.7) sistemani yechib, x_2 , x_3 ,…,x_n larning son qiymatlarini topa olsak. Unda (6.1.6) sistema yechilgan bo'ladi.

Endi (6.1.7) sistemadan x_2 noma'lumni yo'qotamiz. Buning uchun $b_{22} \neq 0$ deb faraz qilib, (6.1.7) ning birinchi tenglamasini ketma-ket $-\frac{b_{32}}{b_{22}}$, $-\frac{b_{42}}{b_{22}}$, … ,$-\frac{b_{k2}}{b_{22}}$ larga ko'paytirib, natijalarni shu sistemaning ikkinchi, uchinchi, … , k- tenglamalariga ketma-ket qo'shamiz. Unda

$$\begin{cases} b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + ... + b_{2n}x_n = b_2 \\ \quad c_{33}x_3 + ... + c_{3n}x_n = b'_3 \\ \quad c_{43}x_3 + ... + c_{4n}x_n = b'_4 \\ .... \\ \quad c_{l3}x_3 + ... + c_{\ln}x_n = b'_l \end{cases} \qquad (6.1.8)$$

sistema hosil bo'lib ($l \leq k$), u (6.1.7) ga ekvivalentdir. (6.1.8) sistemaning bir qismi bo'lgan.

$$\begin{cases} c_{33}x_3 + c_{34}x_4 + ... + c_{3n}x_n = b'_3 \\ c_{43}x_3 + c_{44}x_4 + ... + c_{4n}x_n = b'_4 \\ .... \\ c_{l3}x_3 + c_{l4}x_4 + ... + c_{\ln}x_n = b'_l \end{cases} \qquad (6.1.9)$$

(6.1.9) sistemadagi noma'lumlar soni (6.1.8) sistemadagi noma'lumlar sonidan hech bo'lmaganda bitta kam. Biz (6.1.9) sistemani yechsak, (6.1.8) sistemani ham yecha olamiz. Noma'lumlarni yo'qoridagi usulda ketma-ket yo'qotib, oxirida quyidagi uch holdan faqatgina biriga duch kelishimiz mumkin:

1.Noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish jarayonida (6.1.6) sistemaning birorta tenglamasi

$$0\,x_1 + 0\,x_2 + ... + 0\,x_n = d \qquad (6.1.10)$$

Bo'lib bu yerda $d \neq 0$ ko'rinishda bo'lishi mumkin.

2.Sistemaning eng so'nggi (koeffisiyentlari noldan farqli) tenglamasining noma'lumlari soni ikkitadan kichik emas.

3.Eng so'nggi tenglama bir noma'lumli bo'lishi mumkin. (6.1.10) ko'rinishdagi tenglama odatda ziddiyatli tenglama deb yuritiladi. (6.1.10) tenglamani noma'lumlarning hech qanday soni qiymatlari to'g'ri tenglikka aylantira olmaydi. Shuning uchun bunday holda (6.1.6) sistema yechimga ega bo'lmaydi.

2) holda (6.1.7) sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = a_1 \\ \quad b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + \ldots + b_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\quad c_{33}x_3 + \ldots + c_{3n}x_n = c_3 \\ \quad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad\quad l_{tn-1}x_{n-1} + \ldots + l_{tn}x_n = l_t \end{cases} \qquad (6.1.11)$$

ko'rinishni oladi, bu yerda a_{11}, b_{22}, … , l_{tn-1}, l_{tn} lar noldan farqlidir.

(6.1.11) sistema (6.1.6) ning natijasi bo'lgani uchun (6.1.11) ning har bir yechimi (1) ning ham yechimi bo'ladi. (6.1.11) sistemaga e'tibor qilsak, u trapetsiya shaklini ifodalaydi. Shuning uchun bunday sistema trapetsiyasimon sistema deb yuritiladi. Uning eng oxirgi

$$l_{tn-1}x_{n-1}+l_{tn}x_n=l_t \qquad (6.1.12)$$

tenglamasi cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladigan (6.1.11) va demak, (6.1.6) sistema ham cheksiz ko'p yechimga egadir.

E s l a t m a. (6.1.11) sistemaning oxirgi tenglamasi ikkita noma'lumga bog'liq bo'lishi shart emas. 3) holda (6.1.11) sistemaga yana bitta

$$l_{t+1n}x_n=l_{t+1} \qquad (6.1.13)$$

shakldagi tenglama birlashtiriladi. (6.1.13) tenglama, $l_{t+1n} \neq 0$ bo'lgani uchun, yagona yechimga ega. (6.1.13) dan x_n ning $x_n=\alpha_n$ son qiynatini topamiz va bu son qiymatni (6.1.12) ga qo'yib $x_{n-1}=\alpha_{n-1}$ ni topamiz. Keyin (6.1.11) sistemaning qolgan tenglamalaridan x_{n-2}, x_{n-3} ,…, x_2 , x_1 larga mos keluvchi α_{n-2}, α_{n-3}, …, α_2 , α_1 larni topamiz. Natijada (6.1.6) sistema (α_1, α_2 , … ,α_n) ko'rinishdagi yagona yechimga ega bo'ladi. Sistemaning oxirgi ko'rinishi uning uchburchak ko'rinishi deb yuritiladi.

Xulosa: Agar noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish natijasida:

a) sistemaning biror tenglamasi ziddiyatli tenglamaga aylansa, u holda (6.1.6) sistema yechimga ega bo'lmaydi;

b) sistema trapetsiyasimon shaklga kelsa, (6.1.6) sistemaga cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi;

v) sistema uchburchak shaklga keltirilsa, u holda (6.1.6) sistema yagona yechimga ega bo'ladi.

6.2. Chiziqli tenglamalar sistemasini teskari matritsa yordamida yechish.Tatbiqlari

$|A| \neq 0$ bo'lsa, u holda (6.1.1) CHTS yagona yechimga ega va u quyidagi formulalar orqali ifodalanadi:

$$x_1 = |A|^{-1}(\beta_1 A_{11} + ... + \beta_n A_{n1}), ..., x_n = |A|^{-1}(\beta_1 A_{1n} + ... + \beta_n A_{nn}).$$

Isbot. $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$ sistemani

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$ belgilashlar yordamida

$AX = B$ ko'rinishga keltiramiz. Teorema shartiga ko'ra $|A| \neq 0$ bo'lganligi uchun $AX = B$ matritsali tenglamaning yagona $X = A^{-1}B$ yechimi mavjud.

teoremaga ko'ra $A^{-1} = |A|^{-1} \cdot A^*$ ekanligidan,

$$X = A^{-1}B = |A|^{-1} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & ... & A_{n1} \\ . & . & . \\ A_{1n} & ... & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ . \\ \beta_n \end{pmatrix} = |A|^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 A_{11} + & ... & + \beta_n A_{n1} \\ . & . & . \\ \beta_1 A_{1n} + & ... & + \beta_n A_{nn} \end{pmatrix},$$

ya’ni, $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A|^{-1}(\beta_1 A_{11} + \ldots + \beta_n A_{n1}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ |A|^{-1}(\beta_1 A_{1n} + \ldots + \beta_n A_{nn}) \end{pmatrix}.$

Mustaqil yechish uchun misollar

1. Ushbu sistemani Kramer usulida yeching:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5, \\ 2x - y - z = 1, \\ x + 3y + 4z = 6. \end{cases}$$

2. Ushbu sistemani Gauss usulida yeching:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 4, \\ 2x + 3y - z = 3, \\ 4x - y + z = 11. \end{cases}$$

3.Quyidagi sitsemani Gaus usuli bilan yeching.

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

4.Quyidagi sitsemani Kramer usuli bilan yeching.

$$\begin{cases} 4x + 2y = 6 \\ 7x + 3y = 8 \end{cases}$$

5.Quyidagi sitsemani Kramer usuli bilan yeching.

$$\begin{cases} 3x + y = 9 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases}$$

7.VEKTORLAR.

Reja:

1. Vektorlar. Vektorlar ustida chiziqli amallar. Ikki vektorning kollinyarlik sharti. Vektorning o‘qqa proeksiyasi.
2. Vektorning uzunligi. Yo‘naltiruvchi kosinuslar. Vektorlarning skalyar, vektor va aralash ko‘paytmalari.Tatbiqlari.

7.1.Vektorlar. Vektorlar ustida chiziqli amallar. Ikki vektorning kollinearlik sharti. Vektorning o‘qqa proeksiyasi

1 - ta’rif. Agar berilgan kesmaning uchlari tartiblangan bo’lsa, u holda bunday kesma yo’nalgan kesmadeyiladi.Yo’nalgan kesmaning birinchi uchi uning boshi,ikkinchi uchi esa oxirideyiladi.

Boshi *A* va oxiri *B* nuqtada bo’lgan yo’nalgan kesmani $\overrightarrow{AB}$ bilan belgilaymiz

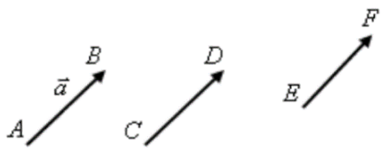
Yo’nalgan $\overline{AB}$ kesmaning uzunligideb, *AB* kesma uzunligiga aytiladi va $|\overline{AB}|$ yoki *AB* bilan belgilanadi.

2 - ta’rif. Agar *AB* va *CD* nurlar bir xil (qarama-qarshi) yo’nalgan bo’lsa, $\overline{AB}$ va $\overline{CD}$ yo’nalgan kesmalar bir xil (qarama-qarshi) yo’nalishlideyiladi.

3 - ta’rif. Uzunliklari teng yo’nalishi bir xil bo’lgan barcha yo’nalgan kesmalar to’plamini ozod vektor yoki qisqacha vektor deb ataladi.(2-chizma)

Vektor ustiga $"\rightarrow"$ belgi qo’yilgan kichik lotin harflari $\vec{a}, \vec{в}, \vec{c}, \ldots$ bilan yoki qo’yiq qilib yozilgan kichik lotin harflari *a,в,c* bilan belgilanadi.

Vektor so’zi lotincha “vector” – so’zidan olingan bo’lib, tashuvchi, olib yuruvchi degan ma’noni bildiradi.



2-chizma

Ta’rifdan vektor, uzunliklari teng bir xil yo’nalgan kesmalar to’plamidan iborat, ekanligi ravshan. Bu to’plamga tegishli har bir yo’nalgan kesma to’plamni to’liq aniqlaydi. Shuning uchun agar $\overline{AB} \in \vec{a}$ bo’lsa, $\vec{a}$ vektorni $\overline{AB} = \vec{a}$ ko’rinishda yozishimiz mumkin.

A nuqta $\overline{AB}$ vektorning boshi, *B* nuqta esa $\overline{AB}$ vektorning oxiri deyiladi. Yo’nalgan $\overline{AB}$ kesmaning uzunligi $\overline{AB}$ vektor uzunligi, yoki moduli deyiladi va $|\overline{AB}|$ ko’rinishida belgilanadi.

4 - ta’rif. Uzunligi birga teng bo’lgan vektor birlik vektor yoki ort deyiladi.

5 -ta’rif. Boshi bilan oxiri ustma – ust tushgan vektor nol vektor deyiladi.

Nol vector $\vec{0}$ ko’rinishida yoki $\overline{AA}$, yoki $\overline{BB}$ ko’rinishida belgilanadi. Nol vektor yo’nalishi (aniq emas) aniqlanmagan.

6 -ta’rif. Agar $\overline{AB} \in \vec{a}$, $\overline{CD} \in \vec{b}$ yo’nalgan kesmalar bir xil (qarama-qarshi) yo’nalishli bo’lsa, $\overline{AB} = \vec{a}$ va $\overline{CD} = \vec{b}$ lar bir xil (qarama-qarshi) yo’nalishli deb aytiladi.

Agar $\overline{AB}$ va $\overline{CD}$ lar bir xil yo’nalishli bo’lsa $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD}$ ko’rinishida, qarama – qarshi yo’nalishda bo’lsa $\overline{AB} \uparrow\downarrow \overline{CD}$ ko’rinishda belgilaymiz.

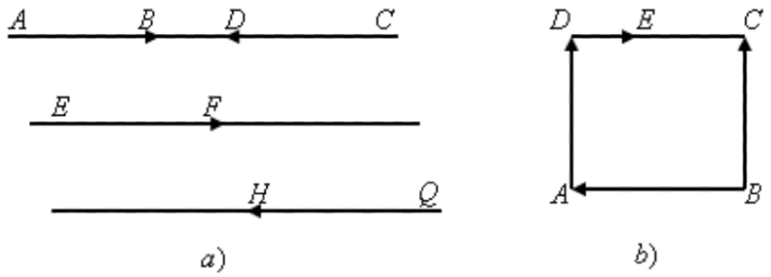
7 -ta’rif. Agar ikkita $\overline{AB}$ va $\overline{CD}$ vektorlar bir to’g’ri chiziqda yoki parallel to’g’ri chiziqlarda yotsa, u holda bu vektorlarni kollinear vektorlar deyiladi.

8 –ta’rif. Agar quyidagi shartlar o’rinli bo’lsa:

1) $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning modullari teng;

2) $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yo’nalishlari bir xil bo’lsa, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni teng vektorlar deyiladi va $\vec{a} = \vec{b}$ ko’rinishida yoziladi.

1. Agar uchta vektor bir tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotsa, u holda bunday vektorlarni komplanar vektorlar deyiladi.



3-chizma

3-chizmada parallel to’g’ri chiziqlarda va *ABCD* kvadrat tomonlarida yotuvchi vektorlar ko’rsatilgan: 1) bularning qaysi juftlari bir xil yo’nalishga va qaysi juftlari qarama-qarshi yo’nalishga ega, 2) qaysi juftlari kollinear bo’ladi, 3) qaysi juftlari teng, qaysi juftlari teng emas.

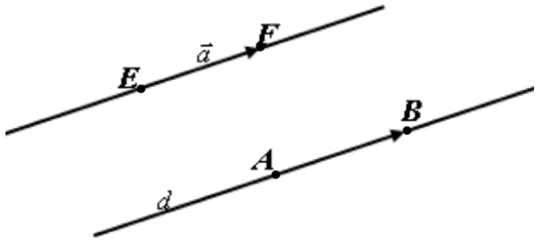
Vektorlar ustidagi chiziqli amallar

Tekislikda $\vec{a} = \overrightarrow{EF}$ va$A$ nuqta berilgan bo'lsin. A nuqtadan EF to'g'ri chiziqqa parallel d to'g'ri chiziq o'tkazamiz. (4-chizma)

A nuqtadan ko'rsatilgan yo'nalishda $\vec{a}$ vektor uzunligini o'lchab qo'yib

B nuqtani topamiz. $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Shunday qilib

$\vec{a}$ ni A nuqtadan qo'ydik, ya'ni ko'chirdik.



4-chizma

9-ta'rif. Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yig'indisi deb, ixtiyoriy A nuqtadan $\vec{a}$ vektorni qo'yib, uning oxiri B nuqtaga $\vec{b}$ vektorni qo'yganda boshi $\vec{a}$ vektorning boshi A nuqtada oxiri $\vec{b}$ vektorning oxiri C nuqtada bo'lgan $\overrightarrow{AC}$ vektorga aytiladi.

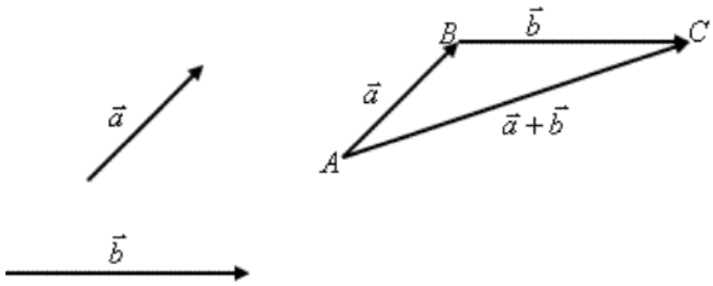
$\vec{a}$ va$\vec{b}$ vektorlarning yig'indisi $\vec{a} + \vec{b}$ kabi belgilanadi. (5- chizma)

Vektorlarni qo'shish ta'rifidan istalgan A ,B va C uchta nuqta uchun

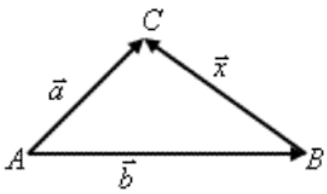
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglikni vektorlarni qo'shishning uchburchak qoidasi deyiladi.

10-ta'rif. $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlarningayirmasideb, shunday $\vec{x}$ vektorgaaytiladiki, ularuchun



5-chizma



6-chizma

$\vec{b} + \vec{x} = \vec{a}$ tenglik o'rinli bo'ladi. U holda $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$.(6- chizma)

Ikkita vektorning ayirmasi hamma vaqt mavjud va bir qiymatli aniqlanishini isbotlash mumkin.

11-ta'rif. $\vec{a} \neq \vec{0}$ vektorning $\alpha \in R$ songa ko'paytmasi deb quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $\vec{p}$ ga aytiladi va $\vec{p} = \alpha \cdot \vec{a}$ ko'rinishda yoziladi.

1) $|\vec{p}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$;

2) $\vec{p}$ vektor $\vec{a}$ ga kollinear.

3) Agar α >0 bo'lsa $\vec{p}$ va $\vec{a}$ vektorlar bir xil yo'nalgan, agar α <0 bo'lsa, $\vec{p}$ va $\vec{a}$ vektorlar qarama- qarshi yo'nalgan bo'ladi.

1.1-teorema.Vektorlarni qo'shish va songa ko'paytirish quyidagi xossalarga ega.

1°. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (qo'shishga nisbatan kommutativ)

2°. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (qo'shishga nisbatan assotsiativ)

3°. Ixtiyoriy $\vec{a}$ vector uchun shunday $\vec{0}$ vector mavjudki ular uchun: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

4°. Har bir $\vec{a}$ vector uchun shunday - $\vec{a}$ vector mavjudki ular uchun:

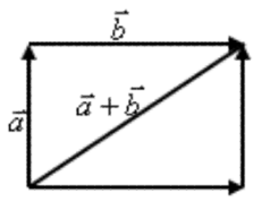
$\vec{a}$ + (-$\vec{a}$)=$\vec{0}$ (bunda -$\vec{a}$ ni $\vec{a}$ ga qarama-qarshi vektor deyiladi).

5°. Ixtiyoriy ikki haqiqiy α, β son va ixtiyoriy $\vec{a}$ vektor uchun: $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\,\vec{a}$

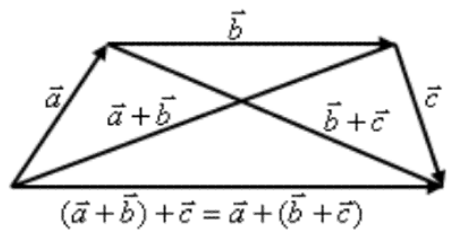
6°. Ixtiyoriy ikki haqiqiy α, β son va ixtiyoriy $\vec{a}$ vector uchun: $(\alpha\cdot\beta)\cdot\vec{a}=\alpha\cdot(\beta\cdot\vec{a})$

7°.Ixtiyoriy α haqiqiy son va ixtiyoriy $\vec{a}$, $\vec{b}$ vectorlar uchun: $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\,\vec{b}$

8^0. Ixtiyoriy $\vec{a}$ vector uchun: $1\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot 1=\vec{a}$



7-chizma



8-chizma

Isbot. 1, 2 xossalarning isbotini 7, 8 chizmalardan ko'rish mumkin.

3^0 va 8^0 xossalar ravshan. 4^0 ga qaraylik. Agar $\vec{a}=\overrightarrow{MN}$ bo'lsa, -$\vec{a}$ sifatida $\overrightarrow{NM}$ ni olish mumkin. Vektorlarni qo'shish ta'rifiga asosan

$\vec{a}$ +(-$\vec{a}$)= $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{MM}=\vec{0}$

5^0, 6^0, 7^0 xossalarni talabalar mustaqil ish sifatida o'rganadi.

Vektorlarning chiziqli bog'liqligi.

Ixtiyoriy

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, ... \vec{a}_n \qquad (7.1.1)$$

vektorlar sistemasi va $\alpha_1,\ \alpha_2, \dots, \alpha_n$ haqiqiy sonlar berilgan bo'lsin.

$$\vec{p} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \dots + \alpha_n\vec{a}_n \qquad (7.1.2)$$

vektorni berilgan (7.1.1) vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi deyiladi. Bunda $\vec{p}$ vektor (7.1.1) vektorlar sistemasi orqali chiziqli ifodalangan deyiladi, $\alpha_1,\ \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sonlar chiziqli kombinatsiya koeffitsentlari deyiladi.

12-ta'rif. Agar koeffitsentlarning kamida bittasi noldan farqli bo'lganda

$$\vec{p} = 0 \qquad (7.1.3)$$

bo'lsa, u holda (7.1.1) vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq deyiladi.

Agar (7.1.3) tenglik $\alpha_1,\ \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sonlarning hammasi nolga teng bo'lgandagina o'rinli bo'lsa, (7.1.1) vektorlar sistemasi chiziqli erkli deyiladi.

1.2-teorema. Agar (7.1.1) vektorlar sistemasining biror vektori nol vektor bo'lsa, u holda bu vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq bo'ladi.

Isbot. Faraz qilaylik $\vec{a}_k = \vec{0}$ bo'lsin, u holda $\alpha_k \neq 0, \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{k+1} = \dots = \alpha_n = 0$, sonlar uchun $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \dots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}$ munosabat o'rinli bo'ladi. Demak, ta'rifga asosan (7.1.1) vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq.

Quyidagi teoremalarni talabalar o'zlari isbotlasin.

1.2-teorema. Agar (7.1.1) vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq bo'lsa, sistemaning kamida bitta vektori uning qolgan vektorlari orqali chiziqli ifodalanadi.

1.3-teorema. Ikkita vektor chiziqli bog'liq bo'lishi uchun ularning kollinear bo'lishi zarur va etarli.

1.4-teorema. Uchta vektor chiziqli bog'liq bo'lishi uchun ularning komplanar bo'lishi zarur va etarli.

Vektor fazo va bazis.

Fazodagi barcha vektorlar to'plamini *V* bilan belgilaymiz, unda vektorni qo'shish va ayirish, vektorni songa ko'paytirish amallari aniqlangan.

V vektorlar to'plami 1.1-teoremada aytilgan sakkizta xossani qanoatlantirsa, u holda *V* vektorlar to'plamini vektor fazo yoki chiziqli fazo deyiladi.

1. Vektor fazoning bazisi

Vektor fazoda ma’lum tartibda olingan chiziqli erkli vektorlar

$$\vec{e}_1,\ \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n \qquad (7.1.4)$$

berilgan bo’lsin.

Ta’rif. Vektor fazoning har bir vektori (7.1.4) vektorlar sistemasi orqali chiziqli ifodalansa, (7.1.4) sistema vektor fazo bazisi deyiladi.

Ya’ni $\forall \vec{a} \in V, \quad \vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + ... + \alpha_n\vec{e}_n$

Ta’rif. Agar bazis vektorlarning har bir vektori birlik vektor bo’lib, ularning har ikkitasi o’zaro perpendikulyar bo’lsa, bunday bazisni ortogonal bazis deyiladi.

Bazis vektorlar soni vektor fazoning o’lchovi deyiladi.

2.Vektorlarning berilgan bazisga nisbatan koordinatalari va ularning xossalari.

V₃ uch o’lchovli chiziqli fazo va uning $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazis vektorlari berilgan bo’lsin, u holda ta’rifga ko’ra bu fazoning har bir $a \in V_3$ vektorini

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \qquad (7.1.5)$$

ko’rinishda yozish mumkin. $x, y, z \in R$

(7.1.5) ifodani $\vec{a}$ ning $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazis vektorlar bo’yicha yoyilmasi deyiladi.

2.1-teorema. Vektor fazoning ixtiyoriy vektori tanlab olingan bazis vektorlarga nisbatan yagona yoyilmaga ega.

Isbot. Faraz qilaylik, $\vec{a}$ vector bazis $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektorlar bo’yicha

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \qquad (7.1.6)$$

yoyilmadan tashqari, ikkinchi bir

$$\vec{a} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 + z'\vec{e}_3 \qquad (7.1.7)$$

yoyilmaga ham ega bo’lsin. (7.1.6) tenglikdan (7.1.) tenglikni hadlab ayirib quyidagiga ega bo’lamiz $(x - x')\vec{e}_1 + (y - y')\vec{e}_2 + (z - z')\vec{e}_3 = \vec{0}$. $\vec{e}_{1,}\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ vektorlar chiziqli erkli bo’lgani uchun: $x - x' = 0$, $y - y' = 0$, $z - z' = 0$. Bundan $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$ demak, yoyilma yagona. (7.1.6) yoyilmadagi *x*, *y*, *z* haqiqiy sonlar $\vec{a}$ vektorning ($\vec{e}_{1,}\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$) bazis vektorlarga nisbatan koordinatalari deyiladi va $\vec{a}(x, y, z)$ ko’rinishda yoziladi. Shunday qilib $\vec{a}(x, y, z) \Leftrightarrow \vec{a} = x\ \vec{e}_1 + y\ \vec{e}_2 + z\ \vec{e}_3$

Natija.Nol vektorning har qanday bazisga nisbatan koordinatalari nolga teng: $\vec{0}$ (0, 0, 0).

V_3 vektor fazoda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o'zining bazis ($\vec{e}_{1,}$ $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$) vektorlariga nisbatan ushbu koordinatalarga ega bo'lsin:

$\vec{a}(x_1, y_1, z_1) \Leftrightarrow \vec{a} = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3$ $\qquad$ $\vec{b}(x_2, y_2, z_2) \Leftrightarrow \vec{b} = x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + z_2\vec{e}_3$

1. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni qo'shamiz (ayiramiz).

$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3) \pm (x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + z_2\vec{e}_3)$

Bu tenglikdan vektorlarni qo'shish (ayirish) xossalariga ko'ra

$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2)\vec{e}_1 + (y_1 \pm y_2)\vec{e}_2 + (z_1 \pm z_2)\vec{e}_3$.

Bundan $(\vec{a} \pm \vec{b})[(x_1 \pm x_2), (y_1 \pm y_2), (z_1 \pm z_2)]$.

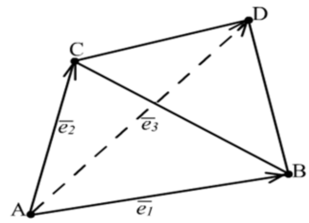
Demak, ikki vektor yig'indisining (ayirmasining) koordinatalari qo'shiluvchi (ayriluvchi) vektorlar mos koordinatalarning yig'indisidan (ayirmasidan) iborat.

2. $\vec{a}$ ning λ songa ko'paytmasining, ya'ni $\vec{p} = \lambda\vec{a}$ vektorning koordinatalari

$\vec{p} = \lambda\vec{a}(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ $\qquad$ bo'ladi.

Masala: ABCD tetraedrning qirralaridan iborat $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ larni bazis vektor bo'lsin, $\overrightarrow{BC}$ ning shu vektorga nisbatan koordinatalarini toping.

Yechish $\quad \overrightarrow{AB} = e_1$, $\qquad \overrightarrow{AC} = e_2$ va $\overrightarrow{AD} = e_3$ belgilaymiz.



9-chizma

$\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{e}_2 - \vec{e}_1 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 = (-1)\vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3$ $\overrightarrow{BC}$ $(-1;\ 1;\ 0)$.

Misollar. $\vec{a}(3,\ -2,\ 1)$, $\quad \vec{b}(-1,\ 0,\ -2)$ $\quad$ va $\quad \vec{c}(1,\ 2,\ 0)$ $\quad$ vektorlar berilgan. $\vec{a} + \vec{b}$, $\quad \vec{b} - \vec{c}$, $\quad 3\vec{a}$, $\quad \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - 3\vec{c}$ vektorlarning koordinatalarini aniqlang.

Yechish $\quad \vec{a} + \vec{b} = (3 + (-1));\quad (-2) + 0;\quad (\vec{a} + \vec{b})(2;\ -2;\ -1); \vec{b} - \vec{c}$ $\quad$ vektor koordinatalar $(\vec{b} - \vec{c})(-2;\ -2;\ -2);\ 3\vec{a}(3;\ -2;\ 1) = \vec{a}(9;\ -6;\ 3)$;

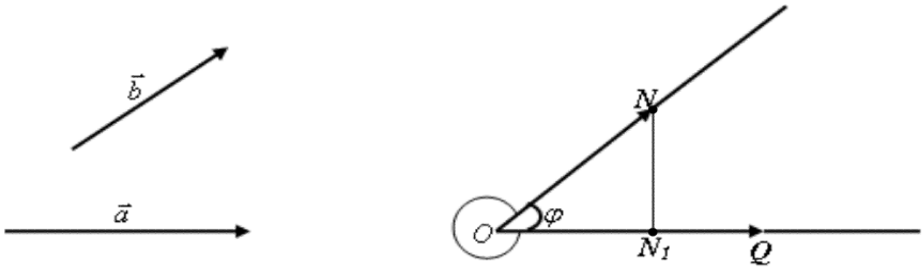
$$\vec{p} = (\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - 3\vec{c})(3 - \frac{1}{2} - 3;\ \ -2 + \frac{1}{2}\cdot 0 - 3\cdot 2;\ 1 + \frac{1}{2}(-1) - 3\cdot 0)$$

bundan $\vec{p}(-\frac{1}{2},\ -8,\ 0)$

Vektorlarning skalyar ko'paytmasi.

Yuqorida, vektorlar ustidagi chiziqli amallar: vektorni qo'shish va ayirish, vektorni songa ko'paytirish amallari bilan tanishdik. Endi chiziqli bo'lmagan yangi amal, vektorni skalyar ko'paytirish amali bilan tanishaylik.

Fazoda (yoki tekislikda) $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar berilgan bo'lsin. *O* nuqtaga $\vec{a} = \overrightarrow{OQ}, \vec{b} = \overrightarrow{ON}$ vektorlarni qo'yamiz (11-chizma).



11-chizma

O, Q, N nuqtalar orqali aniqlangan tekislikda, *OQ* va *ON* nurlar yordamida ikkita burchak aniqlanadi, bulardan biri φ ikkinchisi $2\pi - \varphi$.

Bu burchaklarning eng kichigini $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak deb aytiladi va $(\vec{a}\ \vec{b}) = \varphi$ ko'rinishda belgilaymiz.

1-tarif. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning uzunliklari bilan ular orasidagi burchak kosinusini ko'paytirishdan hosil bo'lgan son bu vektorlarning skalyar ko'paytmasi deb aytiladi.

Vektorlarning skalyar ko'paytmasi $\vec{a}\cdot\vec{b}$ yoki $(\vec{a}\vec{b})$ ko'rinishida yoziladi.

Ta'rifga ko'ra

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi \qquad (7.1.8)$$

Misol. $|\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}| = 4$ l. bo'lib, $\varphi = 60^0$ bo'lsa, $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ni toping.

Yechish: $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi = 3\cdot 4\cos 60^0 = 12\cdot\frac{1}{2} = 6.$

Natija.Nol vektorning har qanday vektorga skalyar ko'paytmasi nolga teng.

Skalyar ko'paytma xossalari

1^0. Ixtiyoriy ikkita vektor uchun: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;

2^0. Ixtiyoriy uchta $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar uchun $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}$;

3^0. Ixtiyoriy ikki $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlar va ixtiyoriy haqiqiy λ son uchun: $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$;

4^0. Ixtiyoriy $\vec{a}$ vektor uchun $\vec{a}\,\vec{a}=|\vec{a}|^2$

$\vec{a}\,\vec{a}$ coni $\vec{a}$ vektorning skalyar kvadrati deyiladi va $\vec{a}^2$ kabi belgilanadi. $\sqrt{\vec{a}^2}$ soni $\vec{a}$ vektorning uzunligi deyiladi va $|\vec{a}|$ bilan belgilanadi.

5^0. Agar $\vec{a}=0$ bo’lsa, $\vec{a}^2=0$.

Isbot. 1^0-xossani isbotlaylik.

Ta’rifga ko’ra $\begin{matrix}\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{a}\wedge\vec{b})\\ \vec{b}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{b}\wedge\vec{a})\end{matrix}$.

Kosinus juft funksiya ekanini e’tiborga olsak, u holda $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.

3^0-xossa, skalyar ko’paytma ta’rifiga ko’ra $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=|\lambda\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\lambda\vec{a},\vec{b})$, lekin $|\lambda\vec{a}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$ va $\cos(\lambda\vec{a},\vec{b})=\cos(\vec{a}\,\vec{b})$. Shuning uchun $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

4^0-xossa skalyar ko’paytma ta’rifidan

$\vec{a}\,\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cos(\vec{a}\wedge\vec{a})=|\vec{a}|^2\cos 0^0=|\vec{a}|$ $\qquad |\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}$.

Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar perpendikulyar bo’lsa, skalyar ko’paytma nolga teng:

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Rightarrow\vec{a}\vec{b}=0 \qquad (7.1.9)$$

Buning isboti ta’rifdan kelib chiqadi.

Ortanormallangan $(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3)$ bazis uchun

$$\vec{e}_i\,\vec{e}_j=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases} \quad i,\ j=1,\ 2,\ 3 \qquad (7.1.10)$$

Haqiqatan skalyar ko’paytma ta’rifidan

$\vec{e}_i\,\vec{e}_j=|\vec{e}_i||\vec{e}_j|\cos(\vec{e}_i\wedge\vec{e}_j)=1\cdot 1\cos\frac{\pi}{2}=0$

Xususiy holda

$$\vec{e}_i\cdot\vec{e}_i=|\vec{e}_i|^2=1 \qquad (7.1.11)$$

Koordinatalari bilan berilgan vektorlarning skalyar ko’paytmasi.

Uch o'lchovli vektor fazoda ortonormal bazis $(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3)$ berilgan bo'lsin, bu bazisga nisbatan $\vec{a}(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\vec{b}(x_2,\ y_2,\ z_2)$ koordinatalarga ega:

$$\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3$$
$$\vec{b} = x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + z_2\vec{e}_3$$

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasini hisoblashda (7.1.9) va (7.1.11) larni e'tiborga olsak, quyidagilarga ega bo'lamiz.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3)\cdot(x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + z_2\vec{e}_3) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

7.2. Vektorning uzunligi. Vektorlarning skalyar, vektor ko'paytmasi

Koordinatalari bilan berilgan ikkita vektorning skalyar ko'paytmasi bu vektorlarning mos koordinatalari ko'paytmasining yig'indisiga teng.

Ya'ni: $$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \qquad (7.2.1)$$

Natijalar.1. $\vec{a}(x,\ y,\ z)$ vektor uzunligi

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \qquad (7.2.2\ )$$

2. Ikki $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak

$$\cos(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \qquad (7.2.3)$$

Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektor koordinatalar bilan berilgan bo'lsa, bu vektorlar orasidagi burchak ushbu formula bilan aniqlanadi.

$$\cos(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \qquad (7.2.4)$$

Misol. $\vec{a}(2{,}2{,}3), \vec{b}(2{,}-2{,}0), \vec{c}(5{,}-1{,}4)$ vektorlarning qaysi jufti perpendikulyar?

Yechish $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{c}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}$ skalyar ko'paytmalarini tekshiramiz:

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot 2 + 2\cdot(-2) + 3\cdot 0 = 4 - 4 + 0 = 0$; $\vec{a}\cdot\vec{c} = 10 - 2 + 12 = 20$; $\vec{b}\cdot\vec{c} = 10 + 2 + 0 = 12$;

Bundan $\vec{a}\perp\vec{b}$.

misollar. ABC uchburchakda AB tomon K va N nuqtalar yerdamida teng uchga bulingan: $AK = KN = NB$. Agar, $\overrightarrow{CA} = \vec{a}, \overrightarrow{CB} = \vec{b}$ bulsa, $\overrightarrow{CK}$ vektorni toping.

Yechilishi. $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} \Rightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a})$

$\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AK}$ bo'lgani uchun,

$$\overrightarrow{CK}=\vec{a}+\frac{1}{3}(\vec{b}-\vec{a})=\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}=\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$$

Mustaqil ishlash uchun misollar

1. ABC uchburchakdan AN to‘g‘ri chiziq BAC burchakning bissektrisasi bo’lib, N nuqta BC tomonda yetadi. Agar $\overrightarrow{AB}=\vec{b},\ \overrightarrow{AC}=\vec{c}$ bo’lsa, $\overrightarrow{AN}$ vektorni toping.

2. ABC uchburchak uchlarining radius-vektorlari $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ va $\vec{r}_3$ bo’lsin. Uchburchak medianalari kesishgan nuqtaning radius-vektorini toping.

3. $\vec{a}=m\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$ va $\vec{b}=4\vec{i}+m\vec{j}-7\vec{k}$ vektorlar berilgan. M ning qanday qiymatida bu vektorlar o’zaro perpendikulyar bo‘ladi?

4. $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=3$ va $\vec{a}\perp\vec{b}$ bulsa, $(5\vec{a}+3\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})$ ko’paytmani toping.

5. $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ vektor bilan bir xil yunalishda bo’lgan birlik vektorni toping.

6. Uchlari $A(1;1;1), B(2;3;4)$ va $C(4;3;2)$ nuqtalarda bo’lgan uchburchakning yuzini toping.

7. Uchlari $A(2;2;2), B(4;3;3), C(4;5;4)$ va $D(5;5;6)$ nuqtalarda bo’lgan piramidaning xajmini toping.

8. $\vec{a}=-i+j$ va $\vec{b}=i-2j+2k$ vektorlar orasidagi burchakni toping.

9. Uchlari A (2;-1;3), B (1;1;1), C (0;0;5) nuqtalarda bo‘lgan uchburchakning burchaklarini toping.

10. $\vec{a}=3$ va $\vec{b}=4$ vektorlar berilgan. Ular orasidagi burchak 120° $\vec{c}=2\vec{a}-1{,}5\vec{b}$ vektorning modulini toping.

8. FAZODA ANALITIK GEOMETRIYA ELEMENTLARI.

Reja:

1. Fazoda chiziqlarning tenglamalari
2. Fazoda tekislik.
3. Fazoda to‘g‘ri chiziq va tekislikka oid masalalar.Tatbiqlari.

8.1. Fazoda chiziq tenglamalari.

Ta'rif. Nuqtalar va to'g'ri chiziqlardan tuzilgan uchinchi geometrik ob'yekt tekislikdir (1- ob'yekt - nuqta, 2- ob'yekt - to'g'ri chiziq).

Demak har bir nuqtasi (x,y,z) bilan ifodalangan va

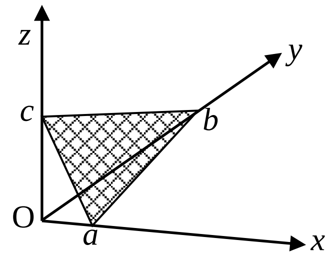
$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (8.1.1)$$

birinchi tartibli (chiziqli) tenglama tekislikni ifodalaydi va uning umumiy tenglamasi deyiladi.

Uni quyidagicha shaklini o'zgartiramiz

$$Ax+By+Cz=-D$$

$$\frac{x}{\frac{-D}{A}}+\frac{y}{\frac{-D}{B}}+\frac{z}{\frac{-D}{C}}=1.$$



Maxrajlarni mos ravishda *a*, *b* va *c* deb belgilasak

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad (8.1.2)$$

hosil bo'ladi.

Agar (a; 0;0), (0; b; 0) va (0; 0 ;c) nuqtalar tekislik tenglamasini qanoatlantirishini, ya'ni unda yotishini hisobga olsak va grafigi bilan to'ldirsak (8.1.2) tekisligimiz koordinat o'qlaridan a, b, c kesmalarni kesib (ajratib) o'tayotganligini ko'ramiz. Shu sababli, (8.1.2) tenglama tekislikning koordinatalar o'qlaridan kesgan kesmalari bilan ifodalangan tenglamasi deyiladi.

O'rta maktab geometriyasidan quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

Teorema. Berilgan bir nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqa bitta va faqat bitta perpendikulyar tekislik o'tkazish mumkin.

Aytaylik, berilgan nuqta P(m, n, p) vektorning uchi M(m, n, p) bo'lsin Berilgan chiziq esa, shu vektorning o'qi bo'lsin. Ixtiyoriy N (x,y,z) nuqtani o'tishi lozim bo'lgan tekislikning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin deylik va tekislikni Q – deb belgilaylik. Shart (ta'rif) ga ko'ra $\overline{P} \perp Q \Rightarrow \overline{P} \perp M\overline{N}$

$$M\overline{N}(x-m, y-n, z-p) \Rightarrow m(x-m)+n(y-n)+p(z-p)=0$$

$$mx+ny+pz-(m^2+n^2+p^2)\,\text{yoki umumiy holda}$$

$$m(x-x_0)+n(y-y_0)+p(z-z_0)=0 \qquad (8.1.3)$$

Bu $M(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan o'tib, P(m, n, p) vektorga perpendikulyar bo'lgan tekislik tenglamasidir.

Agar (8.1.3) ni $P=\sqrt{m^2+n^2+p^2}$ ga bo'lsak, $\frac{m}{p}x+\frac{n}{p}y+\frac{p}{p}=-P=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - P = 0 \qquad (8.1.4)$$

bunda $,\alpha,\beta,\gamma-$lar mos ravishda P vektorning O_x , O_y, O_z -o'qlar bilan tashkil etgan burchaklaridir.

Agar (8.1.1)tenglamani (8.1.2) ga keltirish lozim bo'lsa, uni

$$\mu == \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} - \text{ga ko'paytirish kifoyadir.Bunda } p=\pm\frac{D}{\mu};$$

$$\cos\alpha=\frac{A}{p};\ \cos\beta=\frac{B}{p};\ \cos\gamma=\frac{C}{p}$$

Olingan (8.1.4) tenglama tekislikning normal tenglamasi deyiladi. Chunki u normalning moduli va yo'naltiruvchi burchaklari orqali ifodalangan.

Eslatma. Ikki tekislik orasidagi burchak, ularning kesishuv chizig'ida ularga o'tkazilgan normallari orasidagi burchakka teng. Demak

$$m_1(x-x_0)+n_1(y-y_0)+p_1(z-z_0)=0 \qquad (8.1.5)$$

$$m_2(x-x_0)+n_2(y-y_0)+p_2(z-z_0)=0 \qquad (8.1.6)$$

lar berilgan ikki tekislik bo'lib, ular orasidagi burchak

$$\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{|\bar{p}_1|\cdot|\bar{p}_2|} \qquad (8.1.7)$$

formula bilan hisoblanadi.

Xususiy holda (vektorlar nazariyasidan ma'lumki) tekisliklar o'zaro perpendikulyar bo'lganda

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0 \qquad (8.1.8)$$

shart, parallel bo'lganda esa

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2} \qquad (8.1.9)$$

shart bajariladi.

Topshiriq. Tekisliklar umumiy tenglamalari bilan berilganda (8.1.7), (8.1.8), (8.1.9) ifodalarning shaklini yozib ko'rsating.

Ax+By+Cz+D=0 (Q) tekislik berilgan va

$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ (L) to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin. Ular orasidagi burchak α quyidagi formula bilan topilad:

$$\sin\alpha=\sin(90^0-\varphi)=\cos\varphi=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \qquad (8.1.10)$$

Agar bunda $L\parallel Q$ bo'lsa,

$$\alpha=0\Rightarrow Am+Bn+Cp=0 \qquad (8.1.11)$$

Bu to'g'ri chiziq bilan tekislikning parallelik sharti desak bo'ladi.

Aksincha, $\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$

shart bajarilsa, to'gri chiziq bilan tekislik o'zaro perpendikulyar bo'ladi.

Ikki tekislikning kesishuvi to'g'ri chiziq bo'lganligidan

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

sistema tekisliklarning kesishuv to'g'ri chizig'i tenglamasi bo'ladi. Oxirgi sistemada x va y larni z orqali ifodalasak, oqibatda

$$\frac{x-\frac{B_1D_2-B_2D_1}{A_1B_2-A_2B_1}}{B_1C_2-B_2C_1}=\frac{y-\frac{A_1D_2-A_2D_1}{A_1B_2-A_2B_1}}{A_1C_2-A_2C_1}=\frac{z-0}{A_1B_2-A_2B}$$

tenglama kelib chiqadi. Bu ikki tekislik kesishuvidan hosil bo'lgan chiziqning kanonik tenglamasi bo'ladi.

Har qanday uch tekislik bitta nuqtada kesishadi. U nuqta tekisliklarning juft-juft kesishuv chiziqlari kesishmasida boladi. Bunday koordinatalarini topishni qiziquvchi talabalarning o'zlariga havola qilamiz.(agar eslay olsangiz, uch noma'lumli uchta tenglamalar sistemasining yechimini izlashdir.

II – BOB MATEMATIK ANALIZ.

9. SONLAR KETMA-KETLIGI VA UNING LIMITI

Reja:

1. Ketma-ketlik tushunchasi. Sonlar ketma-ketligining limiti.
2. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar va ularning xossalari. Monoton ketma-ketliklarning limiti.

9.1. Sonli ketma-ketlik tushunchasi. Sonlar ketma-ketligining limiti.

Ta'rif. Aniqlanish sohasi natural sonlar to'plami N dan iborat bo'lgan $x = f(n), (n \in N)$ funksiya natural argumentli funksiya yoki sonli ketma-ketlik deyiladi. Uning qiymatlari argumentning o'sish tartibida

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...,\ x_n, ... \qquad (9.1.1)$$

ko'rinishda yoziladi. Bu yerda $x_1=f(1)$, $x_2=f(2)$, ... , $x_n=f(n)$, ... ketma-ketlikning hadlari; $x_n=f(n)$ - n - hadi yoki umumiy hadi deyiladi. Ketma-ketlik $\{f(n)\}$ yoki $\{x_n\}$ kabi belgilanadi.

Ketma-ketliklarni qo'shish, ayirish, ko'paytirish va barcha hadlari noldan farqli ketma-ketlikka bo'lish mumkin. Buning uchun ularning mos, ya'ni bir xil o'rindagi hadlarini qo'shish, ayirish, ko'paytirish va bo'lish kerak.

Ketma-ketlikning berilish usullari

Ketma-ketlik quyidagi usullarda berilishi mumkin:

1. Umumiy hadi orqali. Masalan:

1) $x=2n-1$ funksiya umumiy hadi $x_n=2n-1$ bo'lgan $\{2n-1\}$ ketma-ketlikni, ya'ni $1, 3, 5,\ ... , 2n-1,\ ...$ toq sonlar ketma-ketligini beradi.

2) umumiy hadi $x_n = 2/n$ bo'lgan ketma-ketlik: $\frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, ..., \frac{2}{n}, ...$

3) umumiy hadi $c_n = \frac{n}{n+1}$ bo'lgan ketma-ketlikning dastlabki to'rtta hadini yozing. $c_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$, $c_3 = \frac{3}{4}$, $c_4 = \frac{4}{5}$, . bo'lganidan uni

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, ..., \frac{n}{n+1}, ...$ deb yozish mumkin.

2. Rekurrent formula bilan (latincha "recurro" - qaytuvchi degani). Bunda uning hadlari o'zidan oldingi hadlar yordamida yoziladi. Masalan: $a_{n+1} = 3a_n+2, a_1$

$= 1$ rekurrent formula bilan berilgan ketma-ketlikning hadlari:

$a_1=1$, $a_2=3a_1+2=3\cdot 1+2=5$, $a_3=3a_2+2=17$, $a_4=3a_3+2=53$, $a_5=3a_4+2=161$, ya'ni: $1, 5, 17, 53, 161, \ldots$

Maktab kursidan ma'lumki, umumiy hadi $a_n = nd+k$ va $b_n = cq^n$ ko'rinishda bo'lgan ketma-ketliklar arifmetik va geometrik progressiyalardir. Bu yerda d arifmetik progressiyaning ayirmasi, q - geometrik progressiyaning maxraji deyiladi.

9.2.Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar va ularning xossalari. Monoton ketma-ketliklarning limiti

Chegaralangan va monoton ketma-ketliklar

Agar ketma-ketlikning barcha hadlari biror sondan kichik(katta) bo'lsa, bunday ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan(quyidan chegaralangan) deyiladi. Ham yuqoridan, ham quyidan chegaralangan ketma-ketlik chegaralangan deyiladi. Har qanday chegaralangan $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun shunday $M>0$ son topiladiki, uning barcha hadlari uchun $|x_n|<M$ bo'ladi.

$\{x_n\}$ ketma-ketlik: $x_1 < x_2 < x_3 <$ bo'lsa - monoton o'suvchi;

$x_1 > x_2 > x_3 > \ldots$ bo'lsa - monoton kamayuvchi;

$x_1 \le x_2 \le x_3 \le, \ldots$ bo'lsa - kamaymaydigan;

$x_1 \ge x_2 \ge x_3 \ge ..$ bo'lsa – o'smaydigan

ketma-ketlik deyiladi. Masalan,

$2, 3, 4, \ldots n+1, \ldots$ ketma-ketlik quyidan chegaralangan va monoton o'suvchi;

$0, -1, -2, \ldots, 1-n, \ldots$ ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan va monoton kamayuvchi;

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ – chegaralangan va monoton kamayuvchi ketma-ketlikdir.

1-misol. Umumiy hadi bilan berilgan quyidagi ketma-ketliklarning to'rttadan hadlarini yozing. Uning o'suvchi yoki kamayuvchi, chegaralangan yoki chegaralanmagan ekanini aniqlang.

1) $x_n=\frac{n+1}{n}$, 2) $x_n=3+\frac{1}{n}$, 3) $x_n=16\cdot 2^{-n}$,

$4)\ y_n=5-3n$, $5)\ x_n= n\,[\,(-1)^n+1]$, $6)\ x_n=\dfrac{(-1)^n+1}{n}$.

$1) x_1=\dfrac{2}{1} = 2,\ x_2 = \dfrac{3}{2},\ x_3= \dfrac{4}{3},\ x_4 = \dfrac{5}{4}$, ya'ni $2, \dfrac{3}{2}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{5}{4}, ...$

Ko'rinadiki, berilgan ketma-ketlik kamayuvchi va chegaralangan, uning barcha hadlari uchun $x_n \leq 2$ tengsizlik o'rinli.

5) $x_1=1\cdot[-1+1]=0,\ x_2=-2, x_3=0,\ x_4=-4, ...$ ya'ni, $0, 4, 0, 8, ...$

Bu ketma-ketlik quyian chegaralangan (barcha hadlari 0 dan kichik emas), lekin o'suvchi ham, kamayuvchi ham emas.

2), 3), 4) va 6) qismlarni mustaqil bajaring.

Sonli ketma-ketlikning limiti

2-misol. Umumiy hadi $x_n=3+10^{-n}$ bo'lgan: 3.1, 3.01, 3.001, 3.0001, .
va umumiy hadi $y_n=3-10^{-n}$ bo'lgan: 2.9, 2.99, 2.999, 2.9999, . .
sonli ketma-ketliklarni qaraylik.

Hadning nomeri n oshishi bilan har ikkala ketma-ketlikning hadlari 3 soniga yaqinlashmoqda: birinchi holda ortig'i bilan ("*3 ga o'ngdan intilayapti*" deyiladi), ikkinchi holda kami bilan (*"3 ga chapdan intilayapti"* deyildai).Har ikkala holda ham $|x_n-3|$ va $|y_n-3|$ ayirmalarning qiymatlari:

$$0.1,\ 0.01,\ 0.001,\ 0.0001, . . .$$

bo'lib, hadning nomeri n ni oshirish hisobiga ularni istalgan musbat, masalan, ε sondan kichik qilish mumkin. Bunday holda 3 soni berilgan ketma-ketliklarning limiti yoki bu ketma-ketliklar 3 soniga intilayapti deyiladi, va bu quyidagicha yoziladi:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(3+10^{-n}) = 3, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}(3-10^{-n}) = 3.$$

yoki

$$x_n =(3+10^{-n}) \to 3, \qquad y_n=(3 -10^{-n}) \to 3.$$

Demak, $\varepsilon>0$ son qanday bo'lmasin, shunday N nomer topiladiki, undan keyingi o'rinlardagi barcha hadlar uchun *($n=N+1, N+2, ...$, ya'ni* $n>N$ ni qanoatlantiruvchi n lar uchun)

$$|x_n-3|<\varepsilon \quad \text{va} \quad |y_n-3|<\varepsilon.$$

tengsizliklar bajariladi. Masalan, $\varepsilon=0.001$ desak:

$|x_n-3| = |3+10^{-n} - 3| = 10^{-n} < 0.001 \Leftrightarrow 10^{-n}<10^{-3} \Leftrightarrow n>3. \Rightarrow N=3$

ya'ni, 3 - dan keyingi barcha hadlar uchun (ya'ni $n=4,5,6,\ldots$ yoki $n>3$ ni qanoatlantiruvchi n lar uchun).

$$|x_n-3|<0.001$$

bajariladi. Yuqorida aytilgan N soni bu misol uchun 3 ga teng ekan: $N=3$. Agar $\varepsilon=0.00001$ desak, N=5 bo'ladi. Ko'rinadiki, N ε ga bog'liq: $N= N(\varepsilon)$.

Ketma-ketlik limiti ta'rifi.

Ta'rif. a soni $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi, agar istalgan $\varepsilon>0$ son uchun shunday N natural son topilib, $n>N$ ni qanoatlantiruvchi barcha hadlar uchun

$$|x_n-a| < \varepsilon \qquad (9.2.1)$$

tengsizlik bajarilsa. Bu quyidagicha ko'rsatiladi:

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a \quad \text{yoki} \quad x_n \to \infty.$$

Limit latincha "limes" - chek, chegara degan so'zdan olingan.

Agar ketma-ketlik chekli limitga ega bo'lsa - yaqinlashuvchi, limiti cheksiz yoki limitga ega bo'lmasa - uzoqlashuvchi deyiladi.

Eslatma: $| x_n-a | < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x_n-a < \varepsilon \Leftrightarrow a-\varepsilon< x_n < a+ \varepsilon \Leftrightarrow x_n \in (a - \varepsilon, a+\varepsilon)$ dan ko'rinadiki, $\{x_n\}$ ketma-ketlik a limitga ega bo'lsa, uning n - dan keyingi barcha hadlari *a nuqtaning* ε *- atrofi* deb ataluvchi $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ intervalda yotadi. Bu intervaldan tashqarida esa chekli sondagi elementlargina qoladi. Shuning uchun a nuqta $\{x_n\}$ ketma-ketlikning quyuqlanish nuqtasi ham deyiladi.

3-misol $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{n} =2$ ekanini ko'rsating. Qaysi nomerdan boshlab bu ketma-ketlikning hadlari $(1.9999; 2.0001)$ oraliqda yotadi?

Istalgan $\varepsilon>0$ son uchun $|x_n-2 |<\varepsilon$ ni qanoatlantiruvchi N nomer topish mumkin ekanini ko'rsatamiz:

$$|x_n-2 | < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{2n+1}{n}-2\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Ko'rinadiki, $|x_n-2| < \varepsilon$ tengsizlik $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$ ni qanoatlantiruvchi barcha hadlar uchun bajariladi, ya'ni $N=[1/\varepsilon]$ deb olish mumkin (*[x]* funksiyaning qiymati x dan katta bo'lmagan eng katta butun songa teng). Ta'rifga ko'ra bu - berilgan ketma-ketlikning limiti 2 ga teng ekanini ko'rsatadi. Qaysi nomerdan boshlab ketma-ketlikning hadlari *(1.9999; 2.0001)* oraliqka tushishini topamiz:

$$(1.999, 2.0001) = (2-0.0001, 2+0.0001)=(2-\varepsilon, 2+\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = 0.0001;$$

$$n > [1/\varepsilon] = 10000; \qquad n > 10000$$

Demak, ketma-ketlikning *10000* - dan keyingi barcha hadlari berilgan *(1.9999; 2.0001)* oraliqda yotadi.

Qanday ketma-ketlik limitga ega bo'ladi?

Bu savolga quyidagi teoremalar javob bo'ladi.

Teorema. Monoton o'suvchi ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan bo'lsa, limitga ega bo'ladi. Monoton kamayuvchi ketma-ketlik quyidan chegaralangan bo'lsa, limitga ega bo'ladi.

2-teorema. Istalgan $\varepsilon>0$ son uchun shunday N nomer topilib, barcha $n>N$, $n'>N$ lar uchun

$$|x_n - x_{n'}| < \varepsilon \qquad (9.2.2)$$

tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashadi.

Aksinchasi ham o'rinli: ketma-ketlik yaqinlashsa, (9.2.2) tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Masalan: *1, 3, 5, . . . , 2n-1, . . .* ketma-ketlik cheksizga teng limitga ega, ya'ni uzoqlashuvchi, chunki monoton o'suvchi bo'lsa-da, yuqoridan chegaralanmagan.

3-teorema. Har qanday chegaralangan ketma-ketlikdan chekli limitga ega bo'lgan qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin.

Masalan:1) *1, 2, 1/2, 2, 1/3, 2, 1/4, 2, 1/5, . . .* ketma-ketlik chegaralangan, ammo limitga ega emas, chunki monoton (o'suvchi yoki kamayuvchi) emas. Lekin undan limiti 0 ga teng bo'lgan:

$$1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \ldots$$

qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin.

2) Umumiy hadi $x_n = 3 + \left(\frac{n}{n+1}\right)^2$ bo'lgan ketma-ketlik monoton o'suvchi va

yuqoridan chegaralangan. Shuning uchun bu ketma-ketlik limitga ega.

Ketma-ketlik limitining xossalari

Ketma-ketlik limitiga doir misollar yechishda amalda limitning xossalaridan foydalaniladi. Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ yaqinlashuvchi ketma-ketliklar va C - o'zgarmas son bo'lsa, quyidagilar o'rinli (qulaylik uchun $n \to \infty$ belgisini yozmaymiz):

1. $\lim C = C.$ 2. $\lim (x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n$

3 . $\lim (x_n \cdot y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n$ 4. $\lim (C \cdot x_n) = C \cdot \lim x_n$

5. $\lim (x_n / y_n) = \dfrac{\lim x_n}{\lim y_n}$, , $(\lim y_n \neq 0).$

Sonli ketma-ketlik (natural argumentli funksiya) haqiqiy o'zgaruvchili funksiyaning xususiy holi bo'lganligi uchun bu xossalarning isboti funksiya limiti haqidagi asosiy teoremalardan kelib chiqadi.

Kopincha, biror n o'zgaruvchiga nisbatan algebraik kasrning limitini topishda, limitga o'tishdan avval, kasrning surat va maxrajini n^k ga bo'lish kerak, bu yerda k - surat va maxrajdagi ko'phadlar daraja ko'rsatkichlarining eng kattasi.

4-misol. Limitni hisoblang. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2 - 5n + 2}{1 + 2n - 8n^2}$

Yechish. Oldingi misolda foydalanilgan usulda hisoblaymiz, faqat kasrdagi ko'phadlarning eng katta darajasi 2 bo'lganidan sura't va maxrajni n^2 ga bo'lib, keyin limitga o'tamiz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 5n + 2}{1 + 2n - 8n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} - 8} = \frac{3 - 0 + 0}{0 + 0 - 8} = -\frac{3}{8}.$$

5-misol. Limitni toping. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}).$

Yechish. Ayirmaning har bir hadida limitga o'tish ∞-∞ ko'rinishdagi aniqmaslikka olib keladi. Shuning uchun avval limit ostidagi ifodani shakl almashtirib, keyin hisoblaymiz:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n + 2 - n}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = 0.$$

Namunaviy masalalar yechimi

1-masala. $3, 2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}, 2\frac{1}{4}, \ldots, 2+\frac{1}{n}, \ldots$ ketma-ketlikning $n \to \infty$ dagi limiti 2 bulinishini ko‘rsating.

Yechilishi. $x_n = 2+\frac{1}{n}$ n soni $\frac{1}{n} < 2$ shart buyicha topamiz. U xolda $|x_n - 2| = \left|2+\frac{1}{n}-2\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$, ya’ni (62) shart bajariladi, shuning uchun $\lim\limits_{n\to\infty}(2+\frac{1}{n}) = 2$

2-masala. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{2n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{2n^2}+\frac{2n}{2n^2}+\frac{1}{2n^2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}\right) =$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{2}+0+0 = \frac{1}{2}.$$

3-masala. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!-n!} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n!(n+1)-n!} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n!(n+1-1)} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0.$

Bu yerda $n! = 1 * 2 * 3 * \ldots \ldots$

4-misol. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot(1+2+\ldots+n) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1+n}{2}\cdot n =$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{n^2} = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2} + \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\lim 1 + \lim\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

5-misol. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}\right) = \mathrm{A}$

Yechilishi. $\frac{1}{(n-1)\cdot n} = \frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$ ayniyatni kavs ichidagi har bir kushiluvchiga kullaymiz:

$$\mathrm{A} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1.$$

6-misol. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+1-2}{2^n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^n+1}{2^n+1}-\frac{2}{2^n+1}\right) =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{2^n+1}\right) = 1-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{2^n+1}\right) = 1-\frac{2}{2^\infty+1} = 1-0 = 1.$$

Mustaqil ishlash uchun misollar.

1. $\frac{7}{3}, \frac{10}{5}, \frac{13}{7}, \ldots, \frac{3n+4}{2n+1}, \ldots$ ketma-ketlikning limiti $\frac{3}{2}$ ga tengligini «$\varepsilon - n_0$» tilida toping.

2. Quyidagi limitlarni xisoblang:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$;

v) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$; g) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}\right)$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2^{\frac{1}{n}}+1}\right)^n$; e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n}\right)^n$.

10.FUNKSIYA.

Reja:

1. Funksiya tushunchasi.
2. Funksiyaning chegaralanganligi, monotonligi, juft va toqligi, davriyligi. Murakkab funksiya.
3. Elementar funksiyalar va ularning xossalari.

10.1.Funksiya tushunchasi.

X va Y haqiqiy sonlar to’plamlari berilgan bo’lsin.

Ta’rif. Agar har bir $x\in X$ ga biror qonun yoki qoida bo’yicha aniq bitta $y\in Y$ mos kelsa, *y miqdor x ning* funksiyasi deyiladi. Bu $y=f(x)$ (yoki $u=\varphi(x)$ va h.k.) ko’rinishda belgilanadi. *x* - *erkli o’zgaruvchi* yoki argument; *y* - funksiya yoki *bog’liq o’zgaruvchi* deyilib, *y* miqdor funksiyaning *x* nuqtadagi qiymatini ifodalaydi. *X* - funksiyaning aniqlanish sohasi deyilib, *D(f)* kabi belgilanadi: *D(f)=X*. Y- funksiyaning qiymatlar to’plami yoki *o’zgarish sohasi* deyilib, *E(f)* kabi belgilanadi: *E(f)=Y.*

Funksiyaning berilish usullari

Funksiya 3 xil usulda berilishi mumkin:

1. A*nalitik* usulda, ya’ni formula bilan.

   Masalan: $y=x^2$, $f(x)=2\sin x,\ g(x)=3^{2x}$.

2. *Jadval* yordamida. Masalan:

x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n

3. *Grafik* usulda.

Funksiyaning aniqlanish sohasini topish

Agar funksiya analitik usulda berilgan bo'lib, aniqlanish sohasi ko'rsatilmagan bo'lsa, argumentning shu analitik ifoda ma'noga ega bo'ladigan barcha qiymatlari to'plami funksiyaning aniqlanish sohasi deb tushuniladi. Bu holda funksiyaning aniqlanish sohasi *tabiiy aniqlanish sohasi* yoki *mavjudlik sohasi* ham deyiladi.

Masalan: $y = \frac{x+1}{x-1}$ funksiyaning aniqlanish sohasi: $x - 1 \neq 0;\ x \neq 1, ya'ni\ x \in (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$; $y = x\sqrt{x}$ funksiyaning aniqlanish sohasi: $x \geq 0$, ya'ni $x \in [0;+\infty)$.

Agar funksiya ko'phaddan iborat bo'lsa, uning aniqlanish sohasi barcha haqiqiy sonlar to'plamidan iborat bo'ladi.

Masalan: $y = 3x^2 + x - 7;\ \ f(x) = 9x^7 + 2x^3 + 1;\ \ F(x) = -0{,}3x^6$ funksiyalarning aniqlanish sohasi $x \in R$, ya'ni $x \in (-\infty; +\infty)$.

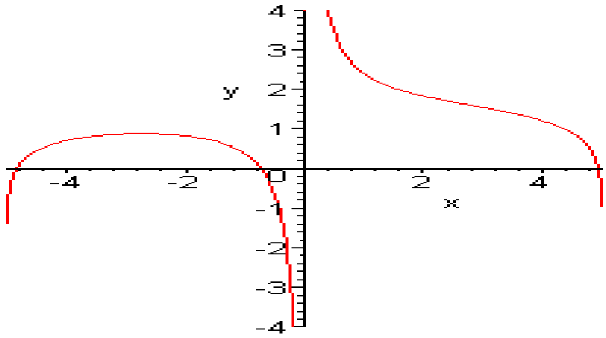
$y = f(x)$ funksiyaning grafigi deb koordinata tekisligining barcha $(x;\ f(x)),\ (x \in X)$ nuqtalari to'plamiga aytiladi. Bu nuqtalar, ko'p hollarda, chiziqni hosil qiladi.

1-misol. $y = \lg(25 - x^2) + \frac{1}{x}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Logarifm ostidagi ifoda $25 - x^2 > 0$ da, ikkinchi qo'shiluvchi esa $x \neq 0$ da mavjud. Unda berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi quyidagi sistemaning yechimidan iborat:

$$\begin{cases} 25 - x^2 > 0, \\ x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 < 25, \\ x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} |x| < 5, \\ x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -5 < x < 5, \\ x \neq 0; \end{cases} \qquad (A)$$

$x \in (-5;0) \cup (0;5)$. *Javobi:* (-5; 0)U(0; 5)



1-rasm.

Murakkab funksiya

Ta'rif. $y=f(u)$ funksiya E to'plamda, $u=\varphi(x)$ funksiya X to'plamda berilgan va $u=\varphi(x)$ ning qiymatlar to'plami E ning qism to'plami bo'lsin. Unda

$$y=f\,[\varphi(x)]$$

murakkab funksiya, yoki $y=f(u)$ va $u=\varphi(x)$ funksiyalarning kompozitsiyasi deyiladi.

Masalan: 1. $y=sinu$ va $u=5x-3$ lardan tuzilgan murakkab funksiya, ya'ni bu funksiyalarning kompozisiyasi $y=sin(5x-3)$ dir.

2. $y=tg^2x$ funksiya $y=u^2$ va $u=tgx$ funksiyalardan tuzilgan murakkab funksiyadir.

10.2. Funksiyaning chegaralanganligi, monotonligi, juft va toqligi, davriyligi.Murakkab funksiya. Juft va toq funksiyalar

X to'plamga x son bilan birga $-x$ ham tegishli bo'lsa, bunday to'plam *koordinata boshiga nisbatan simmetrik to'plam* deyiladi.

Ta'rif. Agar koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo'lgan X to'plamda aniqlangan $y=f(x)$ funksiya uchun istalgan $x\in X$ da: $f(-x) = f(x)$ bo'lsa - *juft funksiya;*

$f(-x) = -f(x)$ bo'lsa - *toq funksiya* deyiladi.

$f(-x) \neq \pm f(x)$ bo'lsa, bu funksiya *juft ham, toq ham emas* deyiladi.

Masalan: $y=5x^2$ juft funksiya, chunki $y(-x)=5(-x)^2=5x^2=y(x);$

$y=4x^5\cos 2x$ toq funksiya, chunki

$$y(-x)=4(-x)^5\cos 2(-x)=-4x^5\cos(-2x)=-4x^5\cos 2x=-y(x);$$

$f(x)=x+7x^2$ juft funksiya ham, toq funksiya ham emas, chunki

$$f(-x)=-x+7(-x)^2=-x+7x^2\neq\pm f(x).$$

Juft va toq funksiyalarning xossalari.

1. Juft funksiyalarning grafigi ordinata o'qiga nisbatan simmetrik bo'ladi.
2. Toq funksiyaning grafigi koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi.
3. O'zgarmas funksiya: $f(x)=c,\ (c-$ o'zgarmas son) - juftdir. Isboti: $f(-x)=c=f(x)$.
4. Juft funksiyalarning yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi, nisbati va kompozitsiyasi ham yana juft funksiya bo'ladi. Masalan: 3, x^4, $\cos x$ juft funksiyalar bo'lgani uchun:

$3+x^4+\cos x,\ 3x^4-\cos 2x,\ 3+x^4\cos 6x,\ \dfrac{3+x^4}{x^4+\cos x}$ funksiyalar ham juft bo'ladi.

5. Ikkita toq funksiyaning yig'indisi va ayirmasi toq, ko'paytmasi va nisbati juft funksiya bo'ladi.

Masalan: $x^3,\ \sin x$ juft funksiyalar bolgani uchun:

$x^3+\sin x,\ x^3-\sin x$ - toq, $x^3\sin x,\ \dfrac{x^3}{\sin x},\ \dfrac{\sin x}{x^3}$ - juft funksiyalar bo'ladi.

6. Juft funksiya bilan toq funksiyaning ko'paytmasi va nisbati toq funksiya, yig'indisi va ayirmasi esa juft funksiya ham, toq funksiya ham bo'lmaydi.

Masalan: x^2 - juft, $\sin x$ - toq funksiyalar bolgani uchun:

$x^2\sin x,\ \dfrac{x^2}{\sin x}$ - toq funksiyalar bo'ladi,

$x^2+\sin x,\ x^2-\sin x$ - juft funksiya ham, toq funksiya ham bo'lmaydi.

Ko'rinadiki, juft va toq funksiyalar ustidagi amallar musbat va manfiy sonlar ustidagi amallarga o'xshash.

Chegaralangan funksiyalar

Ta'rif. Agar *f(x)* funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli barcha *x* lar uchun biror *M>0* son topilib, $|f(x)|<M$ o'rinli bo'lsa, *f(x)* funksiya chegaralangan deyiladi.

Masalan: $x\in(-\infty,+\infty)$ oraliqda: $y=x^2$ funksiya chegaralanmagan, $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ funksiya esa chegaralangandir.

misol. $f(x)=2^{-x}$ va $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$ funksiyalardan qaysi biri $x\in(0;\ +\infty)$ oraliqda chegaralangan.

Qaralayotgan oraliqda$|f(x)| = |2^{-x}| = 1/2^x \le 1$ bo'lgani uchun $f(x)$ $x \in (0; +\infty)$ oraliqda chegaralangan funksiyadir.

$$|g(x)| = \left|\frac{1}{x^2}\right| < M; \qquad |x| > \frac{1}{\sqrt{M}}$$

tengsizlik x ning 0 ga yetarlicha yaqin qiymatlarida bajarilmaydi, yani g(x) - chegaralanmagan funksiyadir.

Davriy funksiyalar

Ta'rif. Funksiya aniqlanish sohasining istalgan x nuqtasi va T haqiqiy son uchun $f(x \pm T) = f(x)$ tenglik bajarilsa, $f(x)$ - davriy funksiya; T – uning davri, T ning eng kichik musbat qiymati T_0 esa bu funksiyaning asosiy davri yoki eng kichik musbat davri deyiladi.

Masalan: 1. $\sin x$ va $\cos x$ davri $T = 2\pi n,\ (n \in Z)$ ga, eng kichik musbat davri esa 2π ga teng davriy funksiyalardir: $\sin x = \sin(x + 2\pi n),\ \cos x = \cos(x + 2\pi n)$

2. tgx va $ctgx$ davrli $\pi n,\ (n \in Z)$ ga, eng kichik musbat davri $T = \pi$ ga teng davriy funksiyalardir: $tgx = tg(x + 2\pi n),\ ctgx = ctg(x + 2\pi n).$

Agar $f(x)$ funksiyaning eng kichik musbat (asosiy) davri T_0 bo'lsa, $Af(kx+b)$ funksiyaning asosiy davri $\frac{\grave{O}_0}{k}$ bo'ladi.

Masalan: $y=sinx$ ning asosiy davri $T_0=2\pi$ bo'lgani uchun $y=-3sin(4x-1)$ funksiyaning asosiy davri $\frac{\grave{O}_0}{4} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ bo'ladi.

Monoton funksiyalar

Ta'rif. Agar x_1 va x_2 $f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli nuqtalar bo'lsin. Agar

-$x_2 > x_1$ bo'lsa $f(x_2) > f(x_1)$ bo'lsa, funksiya - *o'suvchi;*

-$x_2 > x_1$ bo'lsa $f(x_2) \ge f(x_1)$ bo'lsa - *kamaymaydigan;*

- $x_2 > x_1$ bo'lsa $f(x_2) < f(x_1)$ bo'lsa - *kamayuvchi*;

- $x_2 > x_1$ bo'lsa $f(x_2) \le f(x_1)$ bo'lsa - *o'smaydigan*

funksiya deyiladi. Bu xil funksiyalar monoton (bir yo'nalishda o'zgaradigan) funksiyalar, ulardan o'suvchi va kamayuvchi funksiyalar esa qat'iy monoton funksiyalar deyiladi.

Masalan: $y = x^2$ funksiya (parabola) o'zining mavjudlik sohasi $(-\infty;\ \infty)$ da monoton emas. Lekin bu funksiya $[0;\ +\infty)$ oraliqda o'suvchi, $(-\infty;\ 0)$ da kamayuvchi bo'lib, ushbu oraliqlarda monotondir.

10.3. Elementar funksiyalar va ularning xossalari.

Asosiy elementar funksiyalar

Ta'rif. Asosiy elementar funksiyalar deb quyidagi funksiyalarga aytiladi:

1. O'zgarmas funksiya*: y=c (c-o'zgarmas son)*. Uning aniqlanish sohasi $x \in R$.

2. Darajali funksiya*:* $y=x^{\alpha}$ *(α - noldan farqli haqiqiy son).* Aniqlanish sohasi α ga bog'liq.

3. Ko'rsatkichli funksiya*:* $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$. Aniqlanish sohasi: $x \in R$.

4. Logarifmik funksiya*:* $u=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$. Aniqlanish sohasi: $x \in R_+$.

5. Trigonometrik funksiyalar*:*

   y=sinx va *y=cosx.* Aniqlanish sohasi: $x \in R$.

   y=tgx. Aniqlanish sohasi: $x \neq \pi/2+\pi n,\ n \in Z$.

   y=ctgx. Aniqlanish sohasi: $x \neq \pi n,\ n \in Z$.

6. Teskari trigonometrik funksiyalar*:*

   y=arcsinx va *y=arccosx.* Aniqlanish sohasi: $x \in [-1;1]$;

   y=arctgx va *y=arcctgx.* Aniqlanish sohasi: $x \in R$.

Elementar funksiyalar

Ta'rif. *Elementar funksiyalar* deb asosiy elementar funksiyalardan chekli sondagi arifmetik amallar hamda ularning kompozitsiyalari (murakkab funksiyalar tuzish) yordamida hosil bo'lgan funksiyalarga aytiladi.

Ta'rifdan ko'rinadiki, asosiy elementar funksiyalarning o'zi ham elementar funksiyalar sinfiga tegishli. Masalan: quyidagilar elementar funksiyalardir:

$y=\sin(4x-3)$, $y=2^{tgx}$, $y=\ln\cos x$, $y=\sqrt{x^2+\cos 2x}$.

Namunaviy misollar yechimi.

1-misol. $f(x)=x^2$ bo'lsa, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ni toping.

Yechilishi. $x=a$ da $f(a)=a^2$, $x=b$ da $f(b)=b^2$ bo'lgani uchun

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{b^2-a^2}{b-a}=\frac{(b-a)(b+a)}{b-a}=a+b.$$

2- misol. $y=x^2\cdot\sqrt[3]{x}+2\sin x$ funksiyani juft-toqlikka tekshiring.

Yechilishi. $f(x)=x^2\cdot\sqrt[3]{x}+2\sin x$ bo'lgani uchun,

$$f(-x)=(-x)^2\cdot\sqrt[3]{-x}+2\sin(-x)=x^2\cdot(-\sqrt[3]{x})-2\sin x=-(x^2\cdot\sqrt[3]{x}+2\sin x)=-f(x)$$

ya'ni $f(-x)=-f(x)$ ta'rifga asosan, berilgan funksiya toq.

3- misol. $y=\dfrac{x-2}{2x-1}$ funksiyaning aniqlanish va uzgarish sohasini toping.

Yechilishi. 1) $f(x)=\dfrac{x-2}{2x-1}$ funksiyasi aniqlangan bo'lishi uchun $2x-1\neq 0$, ya'ni $2x\neq 1, x\neq\dfrac{1}{2}$ bo'lishi kerak. Demak, funksiyaning anislanish sohasi: $(-\infty;\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2};\infty)=X$

2) $f(x)=\dfrac{x-2}{2x-1}=\dfrac{\frac{1}{2}(2x-1)-\frac{3}{2}}{2x-1}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2(2x-1)}$ kurinishda yozib olamiz.

$\dfrac{3}{2(2x-1)}$ giperbola bo'lgani uchun $Y=(-\infty;+\infty)$.

4- misol. Quyidagi funksiyaningt aniklanish va uzgarish soxalarini toping:

$$y=\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{x}$$

Yechilishi. 1) Birinchi qushiluvchi aniqlangan bo'lishi uchun $4-x^2\geq 0$ bo'lishi kerak, ikkinchi qo'shiluvchida $x\neq 0$. Berilgan funksiyaning aniklanish sohasini topish uchun quyidagi sistemaning yechimlarini topish lozim, ya'ni:

$$\begin{cases}4-x^2\geq 0,\\ x\neq 0.\end{cases}\quad \begin{cases}x^2\leq 4,\\ x\neq 0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x|\leq 2,\\ x\neq 0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\leq x\leq 2,\\ x\neq 0.\end{cases}\Rightarrow x\in[-2;0)\cup(0;2].$$

2) Uzgarish soxasini topishda $\frac{1}{x}$ qo'shiluvchi asosiy rol uynaydi, u giperbola bo'lgani uchun, uning o'zgarish sohasi $-\infty;\ +\infty$. Shuning uchun ham berilgan funksiyaning o'zgarish sohasi $-\infty;\ +\infty$.

Javob: $D_x = x \in [-2;0) \cup (0;2], E_y = (-\infty;+\infty).$

5- misol. $y = \log_2 x$ funksiyaning grafigini chizing.

Yechilishi. $D_x = (0;\infty)$ bo'lgani uchun, $(-\infty;+\infty)$ soxasida logarifm asosi 2 ning darajalaridan iborat nuqtalarga oid jadval chizamiz:

X	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	
Y	-2	-1	0	1	2	3	4	

2) Mos nuqtalarni yasaymiz.

3) Topilgan nuqtalarni tekis egri chiziq Bilan tutashtiramiz.

Mustaqil yechish uchun testlar

1. Quyidagi funksiyalarni juft-toqlikka tekshiring.

a) $y = 2^x + 2^{-x}$; b) $y = |x| - 5e^{x^2}$; s) $y = x^2 + 5x.$

2. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish va o'zgarish sohalarini toping:

a) $y = \frac{Ln(1+x)}{x-1}$; b) $y = \sqrt{1-2x} + 3\arcsin\frac{3x-1}{2}.$

3. Eng kichik davri topilsin:

a) $\sin 2x$; b) $\cos\frac{x}{2}$; v) $tg3x.$

11. FUNKSIYA LIMITI.

Reja:

1. Funksiya limiti ta'riflari. Limitga ega bo'lgan funksiyalarning xossalari. Funksiya limitining mavjudligi haqida teoremalar. Muhim limitlar.
2. Cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalar. Funksiyalarni taqqoslash.Tatbiqlari

Funksiya nuqtadagi limitining ta'rifi

1-ta'rif. *f(x)* funksiya *x=a* nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lsin, *x=a* nuqtaning o'zida aniqlanmagan bo'lishi ham mumkin. Agar istalgan $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ son topilib, $|x-a|<\delta$ ni qanoatlantiruvchi barcha *x* lar uchun

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, *A soni f(x) funksiyaning x=a nuqtadagi limiti* deyiladi. Bu quyidagicha yoziladi.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \qquad \text{yoki} \qquad x\to a \quad da \quad f(x)\to A.$$

Ta'rifni quyidagicha tushunamiz $|x-a|$ ni tanlash (kichraytirish) hisobiga $|f(x)-A|$ ni istalgancha kichik qila olish mumkin bo'lsa, *A* soni *f(x)* funksiyaning *x=a* nuqtadagi limiti deyilar ekan. Boshqacha aytganda, *x* argument biror *a* songa intilganda *f(x)* funksiya ham biror *A* songa intilsa, bu *A* son *f(x)* ning *x=a* nuqtadagi limiti deyiladi.

Misol. $f(x)=\dfrac{2x^2-18}{x-3}$ funksiya berilgan bo'lsin. U *x=3* nuqtada aniqlanmagan. Bu nuqtaning biror atrofida *f(x)* funksiya va *12* soni orasida ayirmaning modulini qaraylik:

$$|f(x)-12|=\left|\frac{2x^2-18}{x-3}-12\right|=\left|\frac{2x^2-18-12x+36}{x-3}\right|=\left|\frac{2(x^2-6x+9)}{x-3}\right|=\frac{2(x-3)^2}{|x-3|}=2|x-3|.$$

Ko'rinadiki, *x* ni *3* ga intiltirib (ya'ni $|x-3|$ ni kichraytirib, masalan, biror $\delta>0$ sondan kichik qilib), *f(x)* ni *12* ga intiltirish (ya'ni $|f(x)-12|$ ni *istalgan* $\varepsilon>0$ *sondan* *kichik qilish)* mumkin. Bunday holda $f(x) = \frac{2x^2 - 18}{x - 3}$ funksiya "*x argument 3 ga intilganida 12 ga intiladi*" yoki "*x=3 nuqtada 12 ga teng limitga ega"* deyiladi. Bu $\lim_{x\to3} f(x) = \lim_{x\to3}\frac{2x^2-18}{x-3} = 12$ kabi yoziladi.

1-ta'rifdan kelib chiqadigan natija

$|x-a| < \delta \Leftrightarrow -\delta<x-a<\delta \Leftrightarrow a-\delta<x<a+\delta \Leftrightarrow x \in (a-\delta;\ a+\delta)$

$|f(x)-A| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon< f(x)-A<\varepsilon \Leftrightarrow A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon \Leftrightarrow f(x)\in (A-\varepsilon;\ A+\varepsilon),$

ya'ni, *f(x)* funksiya *x=a* nuqtada *A* soniga teng limitga ega bo'lsa, *x* ning $(a-\delta;\ a+\delta)$ oraliqdagi qiymatlariga mos *f(x)* funksiyaning qiymatlari $(A-\varepsilon;\ A+\varepsilon)$ oraliqda yotadi.

Misol. $\lim_{x\to-1}\frac{5-5x^2}{x+1} = 10$ ekanini isbotlansin.

Yeching. Berilgan: $a=-1,\ A=10,\ f(x)=\frac{5-5x^2}{x+1}$ **.** Isbotlash kerak: istalgan $\varepsilon>0$ uchun $|f(x)-A| <\varepsilon$ ni qanoatlantiruvchi $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ son topish mumkin ekanini.

$$|f(x)-A| = \left|\frac{5-5x^2}{x+1} - 10\right| = \left|\frac{5(1-x^2)}{x+1} - 10\right| = \left|\frac{5(1+x)(1-x)}{x+1} - 10\right| = |5(1-x)-10| = 5|x+1| < \varepsilon;$$

$|x-a| < \delta$ va $|x+1| < \frac{\varepsilon}{5}$ dan $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$, ya'ni ta'rifda aytilgan δ sonni topish mumkin.Tenglik isbotlandi.

Agar ε=0,001 desak, δ=0,0005 bo'ladi. *x* ning $(a-\delta;\ a+\delta) = (-1{,}0005; -0{,}9995)$ intervalga tegishli qiymatlarida *f(x)* ning mos qiymatlari $(A-\varepsilon, A+\varepsilon) = (9{,}999;\ 10{,}001)$ intervalda yotadi.

Funksiyaning cheksizlikdagi limiti ta'rifi

2-ta'rif. Agar *f(x)* funksiya *x* ning yetarlicha katta qiymatlarida aniqlangan bo'lib, istalgan $\varepsilon>0$ son uchun shunday $M=M(\varepsilon)>0$ soni topilsaki, $|x| >M$ ni qanoatlantiruvchi barcha *x* lar uchun $|f(x)-A| <\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, *A* soni *f(x)* funksiyaning $x\to\infty$ dagi limiti deyiladi. Bu quyidagicha yoziladi:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A. \text{ yoki } x\to\infty \text{ da } f(x)\to A.$$

Ta'rifni quyidagicha tushunamiz: agar $|x|$ ni yetarlicha katta qilib tanlash hisobiga $|f(x)-A|$ ni istalgancha kichik qilish mumkin bo'lsa, A soni $f(x)$ ning $x\to\infty$ dagi limiti deyilar ekan.

2-ta'rifdan kelib chiqadigan natija

Agar $f(x)$ funksiya $x\to\infty$ da A ga teng limitga ega bo'lsa, istalgan $\varepsilon>0$ uchun shunday $M=M(\varepsilon)>0$ topish mumkinri, $|x|>M$ ni qanoatlantiruvchi barcha x larda $f(x)$ funksiyaning qiymatlari $(A-\varepsilon;\ A+\varepsilon)$ oraliqda yotadi.

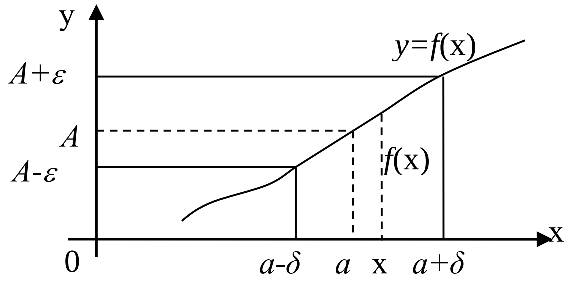
3-misol. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2}{x}=1$ ekanini isbotlang.

$f(x)=\dfrac{x+2}{x}$; $A=1$ bo'lganidan istalgan $\varepsilon>0$ uchun biror $M>0$ son topilib, $|x|>M$ ni qanoatlantiruvchi barcha x lar uchun $\left|\dfrac{x+2}{x-1}\right|<\varepsilon$ bajarilishini ko'rsatish kerak:

$$|f(x)-A|<\varepsilon; \quad \left|\frac{x+2}{x-1}\right|<\varepsilon; \quad \frac{2}{|x|}<\varepsilon; \quad |x|>\frac{2}{\varepsilon}.$$

Ko'rinadiki, $M=\dfrac{2}{\varepsilon}$ deb olsak, barcha $|x|>M$ ni qanoatlantiruvchi x lar uchun $|f(x)-1|<\varepsilon$ bajariladi. Bu 1 soni berilgan funksiyaning limiti ekanini bildiradi.

Misol uchun $\varepsilon=0.001$ desak, $M=2000$. Unda x ning $|x|>2000$ ni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida $f(x)$ ning mos qiymatlari $(A-\varepsilon;\ A+\varepsilon)=(0{,}999;\ 1{,}001)$ intervalda yotadi.



1-rasm

11.2.Cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalar. Funksiyalarni taqqoslash.

Cheksiz kichik funksiyaning ta'rifi**.**

1-ta'rif. $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ bo'lsa, $\alpha(x)$ funksiya $x\to a$ da <u>cheksiz kichik funksiya</u> deyiladi

Cheksiz katta funksiyaning ta'rifi

2-ta'rif. $\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=\infty$ bo'lsa, $\beta(x)$ funksiya $x\to a$ da <u>cheksiz katta funksiya</u> deyiladi

Demak, limiti nolga teng funksiya cheksiz kichik, limiti cheksiz bo'lgan funksiya esa cheksiz katta funksiya ekan.

Cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalarning xossalari:

1°. Agar $x\to a$ da: $\alpha(x)$ cheksiz kichik funksiya bo'lsa, $\frac{1}{\alpha(x)}$ cheksiz katta funksiya bo'ladi; $\beta(x)$ cheksiz katta funksiya bo'lsa, $\frac{1}{\beta(x)}$ cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

2°. Chekli sondagi cheksiz kichik (cheksiz katta) funksiyalarning yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi, chekli songa va chegaralangan funksiyaga ko'paytmasi, chekli songa va chegaralangan funksiyaga nisbati (maxraj nolga teng bo'lmaganda) ham yana cheksiz kichik (cheksiz katta) funksiya bo'ladi.

3°. Agar $f(x)$ funksiya $x\to a$ da A limitga ega bo'lsa, uni A soni va $x\to a$ da cheksiz kichik funksiyaning yig'indisi ko'rinishda ifodalash mumkin. Aksincha, agar $f(x)$ funksiyani biror A soni va $x\to a$ da cheksiz kichik funksiyaning yig'indisi ko'rinishda yoezish mumkin bo'lsa, A soni $f(x)$ ning $x\to a$ dagi limiti bo'ladi, ya'ni

$$\lim_{x\to a} f(x)=A \iff f(x)=A+\alpha(x),\ \lim_{x\to a}\alpha(x)=0.$$

Bu xossalardan quyidagi limitlar haqidagi asosiy teoremalarni isbotlashda foydalaniladi.

Limitlar haqidagi asosiy teoremalar

1-teorema (yig'indining limiti haqida). Ikki funksiya algebraik yig'indisining limiti shu funksiyalar limitlarining algebraik yig'indisiga teng:

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x) \qquad (11.2.1)$$

Bu teorema istalgancha chekli sondagi funksiyalar algebraik yig'indisi uchun ham o'rinli.

2-teorema (ko'paytmaning limiti haqida**).** Ikki funksiya ko'paytmasining limiti shu funksiyalar limitlarining ko'paytmasiga teng:

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x) \qquad (11.2.2)$$

Natija. O'zgarmas ko'paytuvchini (bo'luvchini) limit belgisidan tashqariga chiqarish mumkin:

$$\lim_{x\to a}[C\cdot f(x)]=C\cdot\lim_{x\to a}f(x), \quad \text{(C – o'zgarmas son).} \qquad (11.2.2')$$

3-teorema (bo'linmaning limiti haqida). Ikki funksiya nisbatining limiti, maxrajning limiti noldan farqli bo'lganda, bu funksiyalar limitlarining nisbatiga teng:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}, \quad (\lim_{x\to a}g(x)\neq 0) \qquad (11.2.3)$$

4-teorema (tengsizlikda limitga o'tish haqida). Agar $f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada limitga ega va bu nuqtaning biror atrofida $f(x)>0$ bo'lsa, u holda

$$\lim_{x\to a}f(x)\geq 0 \qquad (11.2.4)$$

bo'ladi.

5-teorema (oraliq funksiyaning limiti haqida). Agar $x=a$ nuqtaning biror atrofidagi barcha nuqtalarda

$$f_1(x)\leq\varphi(x)\leq f_2(x) \text{ va } \lim_{x\to a}f_1(x)=\lim_{x\to a}f_2(x)=A \qquad (11.2.5)$$

bo'lsa, $\lim_{x\to a}\varphi(x)=A$ bo'ladi.

Teoremalarning isbotlari

1-teoremaning isboti $f(x)$ va $g(x)$ ning $x\to a$ dagi limitlari A va B bo'lsin:

$$\lim_{x\to a}f(x)=A, \qquad \lim_{x\to a}g(x)=B$$

3° - xossaga asosan $f(x)$ ni $A+\alpha(x)$, $g(x)$ ni $B+\beta(x)$ deb yezish mumkin, bunda $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ lar $x\to a$ da cheksiz kichik funksiyalar:

$$f(x) = A+\alpha(x), \quad g(x)=B+\beta(x), \qquad \lim_{x\to a}\alpha(x)=0, \qquad \lim_{x\to a}\beta(x)=0.$$

Unda $f(x)+g(x)=(A+B)+\ \alpha(x)+\beta(x)$.

2° - xossaga ko'ra $\alpha(x)+\beta(x)$ ham cheksiz kichik miqdor, shuning uchun $A+B$ son $f(x)+g(x)$ ning limiti bo'ladi (3°- xossaga ko'ra): $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)] = A+B = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$

2-teoremaning isboti

1-teoremaning isboti kabi bajaramiz:

$$\lim_{x\to a} f(x)=A, \Rightarrow f(x) = A+\alpha(x), \lim_{x\to a}\alpha(x)=0, \qquad (11.2.6)$$

$$\lim_{x\to a} g(x) =B \Rightarrow g(x)= B+\beta(x), \lim_{x\to a}\beta(x)=0$$

$$f(x)\cdot g(x)=[A+\alpha(x)]\cdot[B+\beta(x)]=A\cdot B+[A\cdot\beta(x)+B\cdot\alpha(x)+\alpha(x)\cdot\beta(x)].$$

O'rta qavs ichidagi ifoda 2° - xossaga ko'ra $x\to a$ da cheksiz kichik funksiya. Shuning uchun $A\cdot B$

*3°-xossa*ga ko'ra $x\to a$ da $f(x)\cdot g(x)$ ning limiti bo'ladi:

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

Teorema isbotlandi.

3-teoremaning isboti

Shartga ko'ra $\lim\limits_{x\to a} g(x)=V\neq 0$. Oldingi teoremaning isbotiga o'xshash bajaramiz va (4) dan foydalanamiz:

$$\frac{\mathrm{f(x)}}{\mathrm{g(x)}}=\frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)}=\frac{A}{B}+\frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)-\frac{A}{B}}=\frac{A}{B}+\frac{B\cdot\alpha(x)-A\cdot\beta(x)}{B\cdot(B+\beta(x))}.$$

Oxirgi kasr $B\neq 0$ bo'lgani uchun 2°-xossaga asosan cheksiz kichik. Shuning uchun $\frac{A}{B}$ son $\frac{\mathrm{f(x)}}{\mathrm{g(x)}}$ ning $x\to a$ dagi limitidir (3°-xossaga ko'ra):

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}. \qquad (\lim_{x\to a} g(x)\neq 0)$$

Teorema isbotlandi.

Keyingi ikki teoremaning isbotini ko'rsatilgan adabiyotlardan topib o'rganishni tavsiya etamiz.

Eslatma. Yuqoridagi teoremalar *a* cheksiz bo'lganida ham o'rinli.

1-misol. Limitni hisoblang. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4+3x^2}{x^2}$

Yeching. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4+3x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}3=0+3=3.$ *Javoib*: *3*

2-misol. Limitni hisoblang. $\lim\limits_{x\to1}(x+1)(4x-7)$**.**

Yeching. $\lim\limits_{x\to1}(x+1)(4x-7)=\lim\limits_{x\to1}(x+1)\cdot\lim\limits_{x\to1}(4x-7)=(\lim\limits_{x\to1}x+1)\cdot(\lim\limits_{x\to1}4x-7)=$

$=(1+1)\cdot(4\lim\limits_{x\to1}x-7)=2\cdot(4-7)=2\cdot(-3)=-6.$ *Javobi*: *-6*

3-misol. Limitni hisoblang. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x-2}{2x+1}$

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x-2}{2x+1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to2}(3x-2)}{\lim\limits_{x\to2}(2x+1)}=\dfrac{3\cdot2-2}{2\cdot2+1}=\dfrac{4}{5}.$ *Javob*: $\dfrac{4}{5}$.

Namunaviy misollar yechimi.

1-misol. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{5x+2}{2x+3}=\dfrac{\lim\limits_{x\to4}(5x+2)}{\lim\limits_{x\to4}(2x+3)}=\dfrac{5\cdot4+2}{2\cdot4+3}=\dfrac{22}{11}=2$.

Bu misolda bevosita limitga o'tildi, chunki aniqmaslik yo'q.

2-misol. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{3x+5}{2x+7}$; Bu yerda $\bar{x}$ o'rniga ∞ qo'ysak

$\dfrac{3\cdot\infty+5}{2\cdot\infty+7}=\dfrac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmaslik hosil bo'ladi. Bu aniqmaslikni ochish uchun surat va maxrajni x ga bo'lamiz:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+5}{2x+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x+5}{x}}{\frac{2x+7}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{5}{x}}{2+\frac{7}{x}}=\frac{3+\frac{5}{\infty}}{2+\frac{7}{\infty}}=\frac{3+0}{2+0}=\frac{3}{2}=1,5.$$

3-misol. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$ ($\dfrac{0}{0}$ aniqmaslik).

Bu misolni yechish uchun surat va maxrajni ko'paytuvchilarga ajratib, tegishli hadlarni qisqartiramiz va so'ngra limitga o'tamiz:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x}=\frac{3+3}{3}=\frac{6}{3}=2\,.$$

4-misol. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ limitni hisoblang.

Yechilishi. Bevosita limitga o'tsak: $\dfrac{\sqrt{0+4}-2}{0}=\dfrac{2-2}{0}=\dfrac{0}{0}$ ko'rinishidagi aniqmaslik paydo bo'ladi. Undan qutilish uchun kasrning surat va maxrajini $\sqrt{x+4}-2$ ifodaga qo'shma bo'lgan $\sqrt{x+4}+2$ ifodaga ko'paytiramiz va tegishli soddalashtirishlarni bajaramiz:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x\cdot\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+4-4}{x\cdot\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}.$$

4-misol. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-1}{x}$ limitni toping.

Yechilishi. Bevosita limitga utilsa $\dfrac{0}{0}$ hosil bo'ladi.

$$\lim_{x\to 0}\frac{5^x-1}{x}=\ln 5.$$

5-misol. $\alpha=t\ln(1+t)$ va $\beta=t\cdot\sin t$ cheksiz kichiklarni solishtiring.

Yechilishi. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t\cdot\ln(1+t)}{t\cdot\sin t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)}{\sin t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\frac{\ln(1+t)}{t}}{\frac{\sin t}{t}}=$

$$=\frac{\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}\ln(1+t)}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}}=\frac{\lim\limits_{t\to 0}\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}{1}=\ln(\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}})=\ln e=1.$$

Demak, $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\alpha}{\beta}=1,$ (69) ga asosan, $\alpha\sim\beta$

Mustaqil yechish uchun masalalar

1. Limitlarni toping:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1};$ b) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}.$

2. Limitlar toping:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{x^2}$.

3. Limitni hisoblang:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right).$$

4. Chap va o'ng limitlarni toping:

$$f(x)=\frac{1}{x+2^{\frac{1}{x-3}}},\qquad x\to 3$$

12. FUNKSIYANING UZLUKSIZLIGI

Reja:

1. Funksiya uzluksizligi. Uzluksiz funksiyalar ustida amallar.Funksiyaning uzilishi, uzilish turlari.
2. Monoton funksiyaning uzluksizligi va uzilishi.Teskari funksiyaning mavjudligi va uzluksizligi.

12.1. Funksiya uzluksizligi. Uzluksiz funksiyalar ustida amallar.Funksiyaning uzilishi, uzilish turlari

Funksiyaning grafiqi bitta tutash chiziqdan iborat bo'lishi, yoki bir necha (yoki cheksiz ko'p) uzuq chiziqlardan iborat bo'lishi mumkin. Birinchi holda chiziq uzluksiz funksiyaning grafigi, ikkinchi holda esa uzluksiz bo'lmagan, yani uzilishga ega funksiya grafigidir (1-2 – rasmlar).

E'tibor berilsa, $y=f(x)$ funksiay grafigining tutash qismiga mos keluvchi istalgan $x=x_0$ nuqtada funksiya chekli limitga ega va u $f(x_0)$ ga teng: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

Ya'ni chap va o'ng limitlar mavjud va ular $f(x_0$ ga teng: $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$

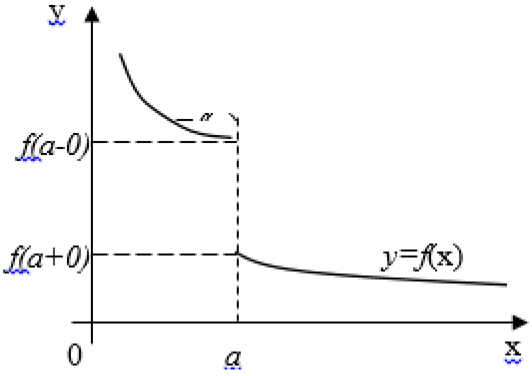
qo'sh tenglik o'rinli. Bunday nuqtalarda funksiya uzluksizdir. Uzuq-yuluq qismlardan iborat grafik qismlarining chegaralariga mos keluvchi nuqtalarda esa bu tengliklar bajarilmaydi (masalan, 1-2-rasmlarda $x=a$ va $x=1$ nuqtalarda). Bunday nuqtalar funksiyaning uzilish nuqtalaridir.

Funksiya nuqtada uzluksizligining ta'rifi

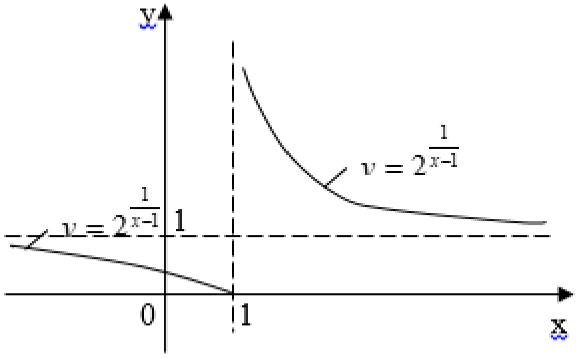
1-ta'rif. $y=f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli x_0 nuqtada

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (12.1.1)$$

bo’lsa, funksiya bu nuqtada uzluksiz deyiladi.



1-rasm.



2-rasm

$\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$ bo’lganidan, (12.1.1) ni $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$ deb yozish ham mumkin. Bundan kelib chiqadiki, uzluksiz funksiyaning limitini topishda funksiyaning ifodasida x o’rniga x_o ni qo’yish mumkin.

Eslatma. 1-ta’rif quyidagilarni bildiradi:

1) funksiya x_0 nuqta va uning biror atrofida aniqlangan;

2) $x=x_0$ nuqtada chap va o’ng limitlar mavjud va teng;

3) bu limitlar funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymatiga teng.

Ya’ni

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0) \qquad (12.1.2)$$

Masalan:

1. $f(x) = x^2$ funksiya istalgan $x = x_0$ nuqtada uzluksiz. Chunki,

$f(x_0 - 0) = (x_0 - 0)^2 = x_0^2$; $f(x_0 + 0) = (x_0 + 0)^2 = x_0^2$; $f(x_0) = x_0^2$. (12.1.2) qo’sh tenglik bajariladi.

2. $y = 2^{\frac{1}{x-1}}$ funksiya x=1 nuqtada uzluksiz emas. Chunki,

$$f(1-0) = \lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}} = 2^{\frac{1}{1-0-1}} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = 0;$$

$f(1+0) = \lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-0} 2^{\frac{1}{x+1}} = 2^{\frac{1}{1+-0-1}} = 2^{+\infty} = \infty;$ $f(1-0) \neq f(1+0)$, ya’ni $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ mavjud emas. Lekin funksiya istalgan $x \neq 1$ nuqtada uzluksiz.

Funksiyaning nuqtadagi orttirmasi

$y = f(x)$ funksiya uchun $x = x_0$ nuqtada: $\Delta x = x - x_0$ - argument orttirmasi;

$\Delta y = \Delta f = f(x) - f(x_0)$ - (1) funksiya orttirmasi deyiladi.

x va *f*(*x*) ni ular yordamida: $x = x_0 + \Delta x,\ \ f(x) = f(x_0) + \Delta f$ ko'rinishda yozish mumkin.

Masalan:

1. $f(x) = 3x$ +5 funksiyaning $x = 1$ nuqtadagi argument va funksiya orttirmalari:

$\Delta x = x - 1;\ \ \Delta f = f(x) - f(1) = 3x + 5 - (3 \cdot 1 + 5) = 3x - 3.$

Unda $x = 1 + \Delta x,\quad f(x) = f(1 + \Delta x) = 3(1 + \Delta x) + 5 = 3\Delta x + 8$ deyish mumkin.

2. $y = x^2 + 2$ funksiyaning istalgan *x* nuqtadagi orttirmasi:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 + 2 - ((x^2 + 2) = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 2 - (x^2 + 2) =$$
$$= 2x\Delta x + (\Delta x)^2; \qquad \Delta y = \Delta x(2x + \Delta x).$$

$x - x_0 = \Delta x,\ \ f(x) - f(x_0) = \Delta y$ tengliklardan $x \to x_0$ da $\Delta x \to 0$, $f(x) \to f(x_0)$ da $\Delta y \to 0$ va $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x - x_0 \to 0} [f(x) - f(x_0)] = 0,$ ya'ni funksiya uzluksizligi ta'rifi (1) ni $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$ deb yozish mumkin.

Funksiya nuqtada uzluksizligining orttirma yordamidagi ta'rifi

2–ta'rif. Funksiya berilgan nuqtada uzluksiz deyiladi, agar bu nuqtada argumentning cheksiz kichik orttirmasiga funksiyaning ham kichik orttirmasi mos kelsa, yani

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \qquad (12.1.3)$$

Masalan**:** $y = \dfrac{1}{x}$ funksiyani (12.1.3) dan foydalanib, *x* nuqtada uzluksizlikka quyidagicha tekshirish mumkin:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0}(f(x + \Delta x) - f(x)) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)} = \frac{0}{x^2} = 0.\ \ (x \neq 0).$$

Demak, berilgan funksiya barcha $x \neq 0$ nuqtalarda uzluksiz.

Nuqtada uzluksiz funksiylarning xossalari

1-teorema. Biror nuqtada uzluksiz bo'lgan funksiyalarning yig'indisi, ko'paytmasi, nisbani (agar qaralayotgan nuqtada maxraj nolga aylanmasa) ham shu nuqtada uzluksiz bo'ladi.

2-teorema. Agar $f(u)$ funksiya $u=A$ nuqtada uzluksiz, $u=g(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada uzluksiz va $g(x_0)=A$ bo'lsa, $f(g(x))$ murakkab funksiya $x=x_0$ nuqtada uzlusiz bo'ladi.

3-teorema. Barcha elementar funksiyalar o'z aniqlanish sohasida uzluksizdir. Bu teoremalarning isbotlari limitning xossalaridan kelib chiqadi.

Misol: $f(x)=x^3$ funksiyani x_o=2 nuqtada uzluksizlikka tekshiring.

1-usul. 1-ta'rifdan foydalanib tekshiramiz:

1) $f(x_0)=f(2)=2^3=8$. Funksiya $x_0=2$ nuqtada aniqlangan.

2) $f(2-0)=\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=2^3=8$; $f(2+0)=\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=2^3=8$; $f(2-0)=f(2+0)$;

3) $f(2-0)=f(2+0)=f(2)$. (2)

(2) shart bajariladi, funksiya x_o=2 nuqtada uzluksiz.

2-usul. Orttirma yordamida tekshiramiz: $\Delta x=x-x_0$, $x=x_0+\Delta x$,

$$\Delta y=f(x)-f(x_0)=x^3-x_0^3=(x_0+\Delta x)^3-x_0^3=x_0^3+3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+$$
$$+(\Delta x)^3-x_0^3=3x_0\Delta x\cdot(x_0+\Delta x).$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}3x_0\Delta x\cdot(x_0+\Delta x)=0, \quad (3)$$

(3) shart bajariladi, funksiya x_o=2 nuqtada uzluksiz.

Funksiyaning chapdan va o'ngdan uzluksizligi

3-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada aniqlangan bo'lib,

$$f(x_0-0)=f(x_0) \quad [f(x_0+0)=f(x_0)]$$

bo'lsa, funksiya x_0 nuqtada chapdan (o'ngdan) uzluksiz deyiladi.

Masalan: [0; 1] kesmada aniqlangan $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$ funksiya x=0 nuqtada o'ngdan, x=1 nuqtada chapdan uzluksizdir. Haqiqatan:

$$f(1-0)=\sqrt{1-0}+\sqrt{1-(1-0)}=1=f(1); \quad f(+0)=\sqrt{+0}+\sqrt{1-(+0)}=0+1=1=f(1).$$

Uzilish nuqtalarining ta'riflari

1 - ta'rif. Uzluksizlik shartlari bajarilmaydigan nuqtalar funksiyaning uzilish nuqtalari deyiladi.

2 - ta'rif. Agar $f(x_0-0)$ va $f(x_0+0)$ limitlar mavjud, lekin $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$ tenglik bajarilmasa, x_0 - $f(x)$ funksiyaning birinchi tur uzilish nuqtasi deyiladi. Bunda, agar $f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$ bo'lsa, x_0 - yo'qotiladigan yoki chetlatiladigan uzilish nuqtasi; $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$ bo'lsa - sakrash nuqtasi deyilasi. $f(x_0+0)$ $f(x_0-0)$ ayirma esa $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi sakrashi deb ataladi.

3 - ta'rif. 1-turga tegishli bo'lmagan uzilish nuqtasi ikkinchi tur uzilish nuqtasi deyiladi. Bunday uzilish nuqtasida bir tomonlama limitlardan kamida biri mavjud emas yoki cheksiz bo'ladi.

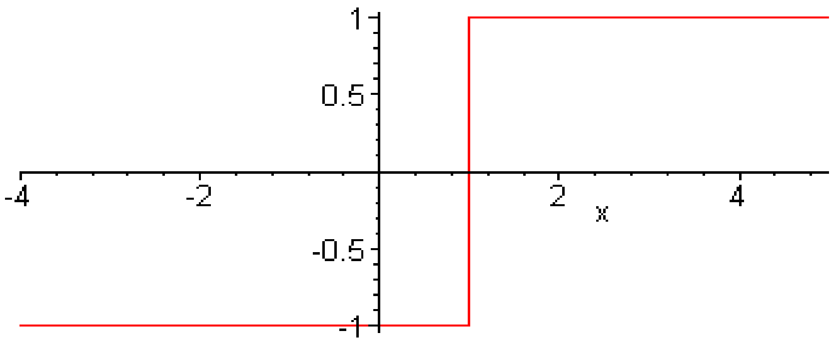
1-misol. $f(x)=\dfrac{x-1}{|x-1|}$ funksiya uzilish nuqtasining turini aniqlang.

Yechish. Uzilish nuqtasi x=1 da bir tomonli limitlarni topamiz:

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1-0}\frac{x-1}{|x-1|}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{x-1}{|x-1|}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{x-1}{-(x-1)}=-1;$$

$$f(1+0)=\lim_{x\to 1+0}\frac{x-1}{|x-1|}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{x-1}{|x-1|}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{x-1}{x-1}=1. \quad f(1-0)\neq f(1+0).$$

Demak, x=1 birinchi tur uzilish nuqtasi, uning xususiy holi sakrash nuqtasi ekan. Bu nuqtadagi funksiyaning sakrashi: $f(1+0)-f(1-0)=1-(-1)=2.$



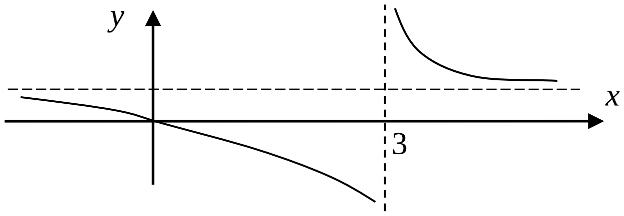
3-rasm

2-misol. $x=3$ nuqta $f(x)=\dfrac{x}{x-3}$ funksiyaning uzilish nuqtasi ekanini ko'rsating.

Yechish. $f(3-0)$ va $f(3+0)$ chap va o'ng limitlarni hisoblaymiz:

$$f(3-0)=\lim_{x\to 3-0}\frac{x}{x-3}=\frac{3-0}{3-0-3}=\frac{3}{-0}=-\infty;\quad f(3+0)=\lim_{x\to 3+0}\frac{x}{x+3}=\frac{3+0}{3+0-3}=\frac{3}{+0}=+\infty.$$

$x=3$ nuqtada bir tomonli limitlar cheksiz. Shuning uchun $x=3$ ikkinchi tur uzilish nuqtasi. Funksiyaning grafigi 4-rasmda keltirilgan.



4-rasm

Funksiyaning intervalda va kesmada uzluksizligi ta'riflari

1-ta'rif. $(a,\ b)$ intervalning har bir nuqtasida uzluksiz funksiya shu intervalda uzluksiz deyiladi.

2-ta'rif. Funksiya $[a,\ b]$ kesmada uzluksiz deyiladi, agar u $(a,\ b)$ intervalda uzluksiz, $x=a$ nuqtada o'ngdan, $x=b$ nuqtada chapdan uzluksiz bo'lsa.

Ko'rsatish mumkinki, biror oraliqda uzluksiz funksiyalarning algebraik yig'indisi, ko'paytmasi, nisbati(kasr maxraji nolga aylanmaydigan nuqtalarda) va kompozitsiyasi ham shu oraliqda uzluksizdir.

Kesmada uzluksiz funksiyaning xossalari.

1- teorema. $[a,\ b]$ kesmada uzluksiz $f(x)$ funksiya bu kesmada chegaralangandir, ya'ni shunday $K>0$ son mavjudki, bu kesmada $|f(x)| \le K$ bo'ladi.

2- teorema (Veyershtrass teoremasi). $[a, b]$ kesmada uzluksiz $f(x)$ funksiya bu kesmada kamida bir marta o'zining eng kichik m va katta M qiymatiga erishadi, ya'ni shunday m va M sonlar mavjudki, $m \le f(x) \le M$ bo'ladi.

3- teorema. Agar $[a, b]$ kesmada uzluksiz $f(x)$ funksiya kesmaning uchlarida turli ishorali qiymatar qabul qilsa, a va b orasida kamida bitta c son topiladiki, bu nuqtada $f(c)=0$ bo'ladi.

Natija. Agar $f(a)\cdot f(b)<0$ bo'lsa, $f(x)=0$ tenglama (a; b) oraliqda kamida bitta ildizga ega bo'ladi.

4- teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz $f(a)=A, f(b)=B\ (A\neq B)$, C son A va B orasida bo'lsa, $(a;\ b)$ intervaldagi kamida bitta c nuqtada $f(c)=C$ bo'ladi.

Natija. Kesmada uzluksiz funksiya bu kesmada o'zining eng katta va eng kichik qiymatlarini va ular orasidagi barcha qiymatlarni qabul qiladi.

Murakkab funksiya hosilasi

y = *f* (*u*), *u* = *φ*(*x*), *x* ϵ *X* murakkab funksiya berilgan, *x* nuqtada $u' = \varphi'(x)$ hosila, $u = \varphi(x)$ nuqtada esa $y'_u = f'(x)$ hosila mavjud bo'lsin, ya'ni:

$$u'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \varphi'(x); \qquad y'_u = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u) \qquad \text{bo'lsin.}$$

Ushbu $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \frac{\Delta u}{\Delta x}$ ayniyatni tuzamiz.

Bundan:

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right] = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta u \to 0)}} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u) \cdot u'_x;$$

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

yoki $\left[f(\varphi(x)) \right]' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$

Shunday qilib, quyidagi isbotlandi:

Teorema: Agar u = φ(x) funksiya x nuqtada u'_x hosilaga ega, y = f(u) funksiya esa u = φ(x) nuqtada y'_u = f'(u) hosilaga ega bo'lsa, u holda y = f(φ(x)) murakkab funksiya x nuqtada y'_x hosilaga ega va $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ formula o'rinlidir.

Boshqacha qilib aytganda, murakkab funksiyaning hosilasi berilgan funksiyaning oraliq argumenti bo'yicha hosilasini oraliq argumentning asosiy argument buyicha hosilasiga ko'paytirilganiga teng.

Izoh: Oraliq argumentlar soni bir nechta bo'lgan murakkab funksiya hosilasi ham shu yo'sinda topiladi. Masalan, *y* = *f* (*x*), *u* = *φ* (*v*), *v* = *ψ* (*x*) bo'lsin. Bu holda

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x.$$

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $y = 3x^2 - 2x$ funksiyaning uzluksizligini tekshiring.
2. $y = \sin 2x$ funksiyaning $x = \frac{\pi}{2}$ nuqtada uzluksizligini tekshiring.
3. $y = arctg \frac{1}{x-4}$ funksiya $x = 4$ nuqtada uzilishga egaligini ko'rsating. Uzilish turini aniqlang va grafigini chizing.

4. $y=\dfrac{1}{(x-1)(x-5)}$ funksiyaning uzilish nuqtalarini toping. Uzilish turini aniqlang va grafigini chizing. Asimtotalar formulasini toping.

5. $y=\dfrac{1}{x^2+x+1}$ funksiyaning uzilish nuqtalarini toping.

6. $y=\dfrac{1}{(x-1)(x-6)}$ funksiyaning uzluksizligini a) $[2;5]$, b) $[4;10]$ segmentlarda tekshiring, asimtotalar tenglamasini toping va shaklini chizing.

13. FUNKSIYA HOSILASI.

Reja:

1. Hosila tushunchasi. Hosila tushunchasiga olib keluvchi masalalar.
2. Hosila hisoblash qoidalari, uning geometrik va fizik ma'nolari.
3. Yuqori tartibli hosilalar.Tatbiqlari.

Hosila tushunchasi

y=ƒ(x) funksiya $x \in D$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. *x* argumentga $(x+\Delta x) \in D$ shartni qanoatlantiradigan Δx orttirma beramiz, bu holda funksiyaning tegishli ortirmasi $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ bo'ladi.

Funksiya hosilasining ta'rifi

Ta'rif: y=f(x) funksiyaning x bo'yicha hosilasi deb, funksiyaning x nuqtadagi orttirmasi Δy ni argument orttirmasi Δx ga nisbatining Δx nolga intilgandagi limitiga aytiladi:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Funksiyaning har xil *x* nuqtalardagi hosilasini topish mumkin, ya'ni funksiya hosilasi ham *x* ning funksiyasi buladi. Bunda hosilaning aniq-lanish D' sohasi funksiyaning uzluksizlik sohasi *D* ga tegishli bo'ladi:

$D' \subset D$. Ixtiyoriy *x* nuqtadagi hosila y'_x, $\dfrac{dy}{dx}$, $f'(x)$, $\dfrac{df(x)}{dx}$ belgilarning biri bilan belgilanadi. Hosilani topish amali differensiallash deyiladi.

Agar $f'(x)$ hosila mavjud bo'lsa, f(x) funksiya *x* nuqtada differen-siallanuvchi deyiladi. Biror oraliqning har bir nuqtasida differensiallanuvchi funksiya, shu oraliqda differensiallanuvchi deyiladi. Agar $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\infty$ bo'lsa, $y=f(x)$ funksiya x nuqtada cheksiz hosilaga ega deyiladi.

Hosila ta'rifini misollar yechishga tadbiq qilish algoritmi

1. $y=f(x)$ funksiyaning $[x,x+\Delta x]$ oraliqdagi orttirmasi hisoblanadi:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

2. Funksiyaning orttirmasi argument orttirmasiga bo'linadi:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

3. Keyingi tenglikda Δx ni nolga intiltirib limitga o'tiladi:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Tadbiqiy masala 1. To‘g‘ri to‘rtburchak shaklidagi yuzi *40000 m*^{2} yer maydoni bo‘ylab ariq qazish kerak. Yer maydoni qanday o‘lchamlarga ega bo‘lsa ariq uzunligi eng kichik bo‘ladi?

Yechish. Bu yerda masala berilgan yuzli to‘g‘ri to‘rtburchaklar ichidan perimetri eng kichigini topishga keladi. To‘g‘ri to‘rtburchaklarning yuzi S, tomonlari x va u bo‘lsin, u holda $S=xy=40000$, bundan $y=\frac{40000}{x}$. To‘g‘ri to‘rtburchak perimetri $P=2(x+y)=2(x+\frac{40000}{x})$.

Biz $P=2(x+\frac{40000}{x})$ funksiyani hosil qildik, uning eng kichik qiymatini hosila yordamida topamiz:

$$P'=2(1-\frac{40000}{x^2}),\ 1-\frac{40000}{x^2}=0,\ 40000=x^2,\ x=200.$$

$$2(1-\frac{40000}{x^2})=0,\ y=\frac{40000}{x}=\frac{40000}{200}=200\text{м};$$

Javob: 200m x 200m, ya'ni kvadrat bo‘lganda ariq uzunligi eng kichik bo‘ladi.

Tadbiqiy masala 2. 60 x 60 o‘lchamli temir listning to‘rtta burchaklaridan kvadrat kesib olish kerak, qolgan qismidan chiqib turgan joylarini egib eng katta sig‘imli quti yasash zarur. Kesib olingan kvadratlar o‘lchami qanday bo‘lishi kerak?

Yechish. x-qutining balandligi deb olsak, 60-2x – quti asosining tomonlari bo‘ladi. Quti parallelopiped shaklida bo‘lib, uning hajmi *V=(60-x)(60-x)x* bo‘ladi. *V=(60-x)²* x funksiyaning eng katta qiymatini hisoblaymiz:

$$V = ((60-x)^2)'\cdot x + x'\cdot(60-x)^2 = -2(60-x)x + 1\cdot(60-x)^2 = -2x(60-x)+$$

$$+(60-x)^2 = (60-x)(-2x+60-x) = (60-x)(60-3x);$$

$$V = (60-x)(60-3x) = 0;$$

$$60-x=0; \qquad 60-3x=0;$$
$$x_1 = 60; \qquad x_2 = 20.$$

V $x=20$ da eng katta qiymatga erishadi.

1-misol. $y = 2x^2 - 3x$ funksiyaning hosilasi topilsin.

Yechilishi:

1) $\Delta y = 2(x+\Delta x)^2 - 3(x+\Delta x) - (2x^2 - 3x);\ \Delta y = (4x - 3 + 2\Delta x)\ \cdot \Delta x;$

2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = (4x-3) + 2\cdot\Delta x;$

3) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}(4x - 3 + 2\cdot\Delta x) = 4x - 3; \qquad y' = 4x-3.$

2-misol

$y = \sin ax, (a$ - son) funksiyaning hosilasi topilsin.

Yechilishi:

1) $\Delta y = \sin a(x+\Delta x) - \sin ax = 2\cos\dfrac{2ax + a\Delta x}{2}\cdot\sin\dfrac{a\cdot\Delta x}{2};$

2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2\cos\dfrac{2ax+a\Delta x}{2}\cdot\sin\dfrac{a\cdot\Delta x}{2}}{\Delta x};$

3) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos\dfrac{2ax+a\Delta x}{2}\cdot\dfrac{a\cdot\sin\dfrac{a\cdot\Delta x}{2}}{\dfrac{a\cdot\Delta x}{2}} = a\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos(ax + \dfrac{a\Delta x}{2})\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{a\Delta x}{2}}{\dfrac{a\Delta x}{2}} =$

$= a\cos ax;$

bu yerda,

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos(ax + \dfrac{a\Delta x}{2}) = \cos ax; \quad \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{a\Delta x}{2}}{\dfrac{a\cdot\Delta x}{2}} = 1.$ Shunday kilib, $(\sin ax)' = a\cos ax.$

13.2. Hosilaning geometrik va fizik ma'nolari.

Hosilaning geometrik ma'nosi. Urinma va normalning tenglamasi

L egri chiziq $y=f(x)$ tenglama bilan berilgan, bunda $f(x)$ biror intervalda aniqlangan va uzluksiz funksiya bo'lsin.

Bu egri chiziqda $M_0(x_0;y_0)$ nuqtani belgilab olamiz. $M(x;y)$ egri chiziqning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. M_0 va M nuqtalardan $\overline{M_0M}$ kesuvchi o'tkazamiz.

<u>Ta'rif:</u> M nuqta egri chiziq buylab M_0 nuqtaga intilganda $\overline{M_0M}$ kesuvchining limitik holati L egri chiziqqa M_0 nuqtada o'tkazilgan urinma deyiladi.

Agar $x - x_0= \Delta x$, $(x = x_0 +\Delta x)$, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ deb olinsa, $tg\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ bo'ladi. $M \to M_0$ da, ya'ni $\Delta x \to 0$ da, funksiyaning uzluksizligiga asosan, $\Delta y \to 0$ ga va kesuvchi urinmaga chegaralanmagan holda intiladi, ya'ni $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \beta = \alpha$ bo'ladi.

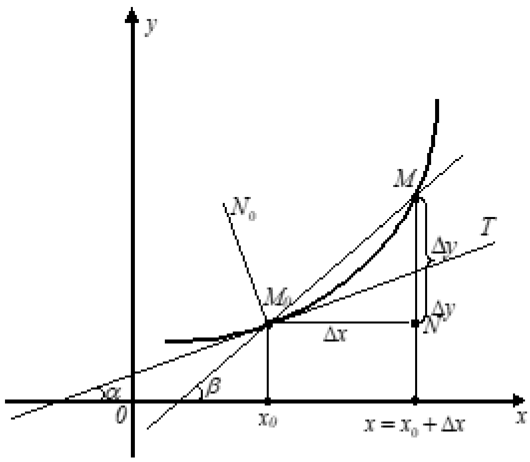
Demak, $\lim\limits_{\Delta x\to 0} tg\beta = tg\alpha$.

Shu sababli, urinma burchak koeffisenti $k_y = tg\alpha = \lim\limits_{\Delta x\to 0} tg\beta = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$ bo'ladi.

<u>Xulosa:</u> Funksiya grafigiga x_0 absissali nuqtadan o'tkazilgan urinmaning burchak koeffisenti bu funksiya hosilasining x_0 nuqtadagi qiymatiga teng: $k_y= f'(x_0)$.(bu holat hosilaning geometrik ma'nosini ifodalaydi).

Agar nuqtadagi hosila chekli bo'lsa, u holda urinma Ox o'qining musbat yo'nalishi bilan $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ burchak hosil qiladi. $f'(x_0) = \infty$ bo'lgan holda esa urinma Ox o'qi bilan $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (to'g'ri) burchak hosil qiladi.

Endi L egri chiziqqa $M_0(x_0;y_0)$ nuqtada o'tkazilgan urinma tenglamasini tuzamiz. Urinma to'g'ri chiziq $M_0(x_0;y_0)$ nuqtadan o'tgani va $k_y = f'(x_0)$ uning burchak koeffisenti bo'lgani uchun uning tenglamasi $y-y_0= f'(x_0)(x-x_0)$ ko'rinishga ega bo'ladi (berilgan nuqtadan berilgan yunalishda o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasiga asosan).



Ta'rif: Egri chiziq M_0 nuqtaga o'tkazilgan normal deb, M_0 nuqtada o'tgazilgan va *(M_0 T)* urinmaga tik bo'lgan *(M_0 N_0)* to'g'ri chiziqka aytiladi. (rasmga qaralsin).

Normalning burchak koeffisiyenti:

$k_n = -\frac{1}{k_y} = -\frac{1}{f'(x_0)}$

Normalning tenglamasi:

$y - y_0 = k_n (x - x_0)$; yoki $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$;

Misol: $y = 2x^2$ parabolaga uning $M_0(1;1)$ nuqtasidan o'tkazilgan urinma va nor-malning tenglamasini tuzing.

Yechilishi: $y = 2x^2$ funksiyaning $x_0 = 1$ nuqtadagi hosilasini topamiz:

$y' = 4x$, bu yerdan $y'(1) = 4x\,/_{x=1} = 4$,

ya'ni $f'(x_0) = f'(1) = 4.$

Urinmaning izlanayotgan tenglamasi

$y - 1 = 4(x - 1)$ yoki $4x - y - 3 = 0.$

Normalning tenglamasi:

$y - 1 = -\frac{1}{4}(x - 1)$ yoki $x + 4y - 5 = 0.$

Hosilaning fizikaviy ma'nosi

Moddiy *M* nuqta $s = f(t)$ qonun bilan to'g'ri chiziqli harakat qilsin va Δt vaqtda yo'lning Δs qismini o'tsin. Bu holda $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ nisbat harakatdagi nuqtaning Δt

vaqtdagi o'rtacha tezligini beradi.

Funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbati - urtacha tezlikdir

O'rtacha tezlikning $\Delta t \to 0$ dagi limiti t momentdagi oniy tezlik deyiladi, ya'ni

$$v = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Hosila – funksiyaning uzgarish tezligidir

4. Hosilaning iqtisodiy ma'nosi

Korxona bir jinsli maxsulot ishlab chiqarsin. Bu holda maxsulotni ishlab chiqarish uchun sarf qilingan harajatni (uni y bilan belgilaymiz) maxsulot miqdori x ga bog'liq deb hisoblash mumkin. Ya'ni $y = f(x)$, bu funksiya ishlab chiqarish funksiyasi deyiladi.

Ishlab chiqarilayotgan maxsulot miqdori Δx ga o'zgarsin, bu holda ishlab chiqarish harajati ham o'zgaradi va u $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ bo'ladi. Ishlab chiqarish harajati orttirmasining ishlab chiqaradigan maxsulot orttirmasiga nisbatani olamiz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (13.2.1)$$

(13.2.1) da limitga o'tamiz:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (13.2.2)$$

(13.2.2) limit yoki $f(x)$ funksiyaning hosilasi, iqtisodiyotda ishlab chiqarishning limitik harajatlari deyiladi (ishlab chikarish harajatlarining uzgarish tezligi).

Izoh: Korxona tomonidan biror maxsulot ishlab chikarish harajatlari, odatda ikki xil bo'lishi ko'zda tutiladi:

a) o'zgaruvchi harajatlar, bular korxona ishlab chiqaradigan maxsulotlar hajmiga proporsional bo'lib, xomashyo va uni keltirishga stanoklar iste'mol qiladigan elektr energiyaga, ishchilarga beriladigan ish haqiga va boshqalarga ketadigan mablag'lardan qushiladi;

b) doimiy harajatlar, bular asosan ishlab chiqariladigan maxsulot xajmiga bog'liq bo'lmaydigan harajatlardir. Bunga imoratlar amartizasiyasi, ba'zi kategoriyadagi yordamchi ishchi va xizmatchilar ish haqi, imoratlarni yoritish va isitishga hamda boshqalarga sarf qilinadigan harajatlar kiradi.

Mustaqil yechish uchun misollar

1 $y=\sqrt{x}$ funksiyaning hosilasini ta'rif buyicha toping.

2. $y=-ctgx-x$ ning hosilasini ta'rif buyicha toping.

3. $y=x^2 \cdot e^x$ kupaytmaning hosilasini toping.

4. $y=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$ bulinmaning hosilasini toping.

5. $y=\sin^3\dfrac{x}{3}$ ning hosilasini toping.

6. $y=e^x \cdot arctge^x-\ln\sqrt{1+e^{2x}}$ murakkab funksiyaning hosilasini toping.

7. $y=(\sin x)^{tgx}$ ko'rsatkichli – logarifmik funksiyaning hosilasini toping.

14. FUNKSIYA DIFFERENSIALI.

Reja:

1. Funksiyaning differensiallanuvchiligi. Funksiya differensiali.
2. Yuqori tartibli differensiallar
3. Teylor formulasi. Ayrim elementar funksiyalarning Teylor formulalari

14.1. Funksiyaning differensiallanuvchiligi. Funksiya differensiali

Differensiallashning asosiy qoidalari

Differensial ham hosila kabi, qaysi o'zgaruvchi bo'yicha hisoblanishidan bog'lik bo'ladi. Qaysi o'zgaruvchi bo'yicha differensial hisoblanayotgan bo'lsa, bu o'zgaruvchi erkli o'zgaruvchi deyiladi. Differensialning qaysi o'zgaruvchi bo'yicha hisoblanayotganini ko'rsatish o'rniga, qaysi o'zgaruvchi erkli deb, tanlanganini aytish qabul qilingan.

Masalan, $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ murakkab funksiya berilgan bo'lsin, x ni erkli o'zgaruvchi deb tanlash mumkin, biroq agar bizni faqat y ning u dan bog'lanishi qiziqtirsa, erkli o'zgaruvchi deb u ni olish mumkin.

Biz differensiallaymiz, differensiallash qoidalari, formulalari va hokazo iboralarni tez-tez ishlatgan edik, lekin qanday funksiya differensiallanuvchi deyiladi?, degan savolga hanuzgacha javob berganimiz yo'q.

Ta'rif: Erkli o'zgaruvchi bo'yicha funksiya hosilasining erkli o'zgaruvchining ixtiyoriy orttirmasiga ko'paytmasi funksiyaning differensiali deyiladi.

Funksiya differensiali *dy* yoki *df(x)* bilan belgilanadi. Shunday qilib, agar *x* erkli o'zgaruvchi bo'lsa $dy = y'\,\Delta x$ (yoki $d f(x) = f'(x)\,\Delta x$). *x* ning tayinlangan qiymatini qaraymiz, Δx asosiy cheksiz kichik bo'lsin. Δy bilan *dy* orasida munosabat o'rnatamiz:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y - dy}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{f'(x)\Delta x}{\Delta x}\right] = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = f'(x) - f'(x) = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Delta y - dy = o(\Delta x) \;\Rightarrow\; \Delta y = dy + o(\Delta x) \qquad (14.1.1)$$

yoki

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x);$$

bu yerda

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \Rightarrow \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = \alpha$$

cheksiz kichik

$$o(\Delta x) = \alpha\,\Delta x\,.$$

Shunday qilib $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x$. Bunda $f'(x)\Delta x$ qo'shiluvchi funksiya orttirmasining bosh chiziqli qismi deyiladi. Demak, funksiyaning differensiali funksiya orttirmasining bosh chiziqli qismi ekan.

Δx ning yetarlicha kichik qiymatlarida (14.1.1) dan

$$\Delta y \cong dy \qquad (14.1.2)$$

taqribiy tenglik hosil bo'ladi.

Xato $\alpha\Delta x$ ga teng, nisbiy xato esa $\dfrac{\alpha\cdot\Delta x}{dy} = \dfrac{\alpha\cdot\Delta x}{f'(x)\cdot\Delta x} = \dfrac{1}{f'(x)}$

Bundan ko'rinadiki Δx ning kichik qiymatlarida (14.1.1) – taqribiy tenglikning nisbiy xatosi $\Delta x\to 0$ da kichikdir.

Ta'rif: Erkli o'zgaruvchining differensiali deb, $y=x$ funksiyaning differensialiga aytiladi.

$$dy=dx=x'\Delta x = 1\cdot\Delta x = \Delta x\ ;$$

$$dx = \Delta x \qquad\qquad (14.1.2)$$

Shunga asosan funksiya diffferensiali

$$dy = f'(x)\,dx$$

ko'rinishni oladi.

Bundan

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

ya'ni, funksiya hosilasi funksiya differensialining argument differensialiga nisbatiga teng. *dy* - ni "*y* mikdorning elementi"deb aytiladi.

Elementar funksiyalarning differensiali jadvali

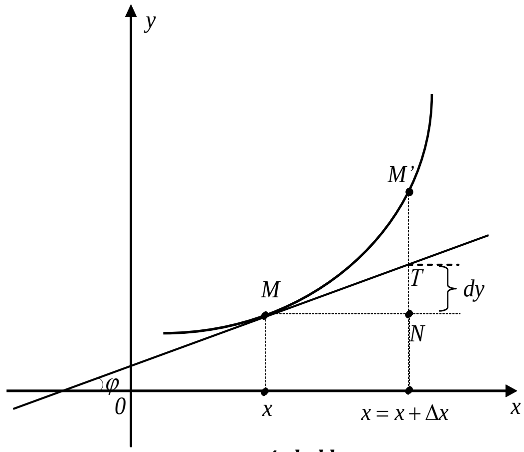
1. $d(x^n) = nx^{n-1}dx \quad (x>0)$;
2. $d(a^x) = a^x \ln a\, dx \quad (a>0, a\neq 1)$;
3. $d(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e\ dx \quad (x>0, a>0, a\neq 1)$;
4. $d(\ln x) = \frac{1}{x}dx$;
5. $d(\sin x) = \cos x dx$;
6. $d(\cos x) = -\sin x dx$;
7. $d(tgx) = \frac{1}{\cos^2 x}dx$;
8. $d(ctgx) = -\frac{1}{\sin^2 x}dx$;
9. $d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$;
10. $d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

11. $d(arctgx) = \frac{1}{1+x^2}dx$;

12. $d(arcctgx) = -\frac{1}{1+x^2}dx$

Differensialning geometrik ma'nosi

y = f (x) funksiya va uning grafigini karaymiz. (***4-shakl***)



4-shakl

$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = NM', \quad MN = \Delta x,$

$NT = MN \cdot tg\varphi = f'(x)\cdot \Delta x = dy$

Shunday qilib, $\Delta y = NM'$ - funksiya grafigi bo'ylab harakatdagi M' nuqta ordinatasining orttirmasi; *dy* esa funksiya grafigiga o'tkazilgan urinma bo'ylab harakatdagi *T* nuqta ordinatasining orttirmasi.

Differensialning mexanik ma'nosi

Moddiy nuqta o'q bo'ylab *s=s(t)* qonun bo'yicha harakat qilsin. *t* vaqtni erkli o'zgaruvchi deb qabul qilamiz. Bu holda *ds(t) = s'(t) Δt = v(t) Δt.*

Shunday qilib, yo'lning differensiali, tezlik o'zgarmay qolganda, moddiy nuqtaning *Δt* vaqtda o'tadigan yo'lidir. Haqiqatda esa tezlik o'zgarmay qolmaydi va nuqtaning *Δt* vaqtda o'tgan haqiqiy yo'li *ds(t)* ga emas, balki, *Δs(t)* ga teng bo'ladi. (*ds(t)* esa yo'lning taqribiy qiymati bo'lib, haqiqiy yo'ldan Δt ga nisbatan ham kam farq qiladi).

Misollar

1. Ish. *A* ishni, *F(x)* ta'sir etuvchi kuch berilganda, siljishning funksiyasi deb qaraymiz. Kichik kesmada *F* kuchni doimiy deb faraz qilib, ish elementini hisoblaymiz:

$$dA = Fdx, \text{ yoki } \frac{dA}{dx} = F.$$

2. Ingichka sterjen massasi. Kichik kesmada chiziqli zichlikni o'zgarmas deb hisoblaymiz. Bu holda massa elementi uchun $dm = \gamma dl$ ga ega bo'lamiz. $\frac{dm}{dl} = \gamma$ massaning hosilasi – chizikli zichlik.

3. Zaryad. Vaqtning kichik oralig'ida tok kuchini doimiy deb hisoblash

mumkin. Shu sababli $dq = idt$.

4. Qizdirilganda issiqlikni ajralishi. Daraja (temperatura)ning yetarlicha kichik o'zgarishida issiqlik sig'imini doimiy deb qisoblash mumkin. bu holda $dq = c\,dt$.

Yig'indi, ko'paytma va bo'linmaning differensiali

$u = u(x)$, $v = v(x)$, $w = w(x)$ funksiyalar X sohada differensiallanuvchi bo'lsin, bu holda quyidagi qoidalar o'rinli:

1. Yig'indi differensiali

$$d(u+v-w)=(u+v-w)'\,dx = (u'+v'-w')dx= u'dx+v'dx-w'dx=du+dv-dw$$

$$d(u+v- w)=du+dv-dw$$

2. Kupaytmaning differensiali

$$d(uv)=(uv)'dx=(u'v+v'u)dx=vu'dx+uv'dx=vdu+udv$$

ya'ni:

$$\boldsymbol{d(uv)=vdu+udv}$$

xususiy holda, $u=C=sonst$ bo'lsa $du = 0$ va

$$d(Cv)=Cdv, \quad dC = 0$$

3. Nisbatning differensiali

$$\boldsymbol{d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}}$$

xususiy holda: $d\left(\frac{c}{v}\right)=-\frac{cdv}{v^2}$; ($C$– $const$).

Differensial formasining invariantligi

$y= f(x)$ funksiya X sohada aniqlangan va $x\in X$ nuqtada chekli hosilaga ega bo'lsin, bu holda ma'lumki

$$dy = y'_x dx \qquad (14.1.3)$$

Endi murakkab funksiyaning hosilasini topamiz:

$y= f(x)$, $x=\varphi(t)$ yoki $y = f(\varphi(t))$ bo'lsin.

Ma'lumki

$$y'_t = y'_x \cdot x'_t \qquad (14.1.4)$$

(14.1.3) tenglikning har ikki tomonini dt ga ko'paytiramiz:

$$y_t' \cdot dt = y_x' \cdot x_t' \cdot dt \qquad (14.1.5)$$

Bundan, $x'_t\, dt = dx$; $y'_t\, dt = dy$ ekanligini hisobga olsak (14.1.4) dan:

$$dy = y'_x dx \qquad (14.1.6)$$

hosil bo'ladi. (14.1.3) va (14.1.6) ifodalar ko'rinishi jihatidan bir-biridan hyech narsa bilan farq qilmaydi, ya'ni x erkli o'zgaruvchi yoki boshqa o'zgaruvchidan bog'lik bo'lishiga qaramasdan differensialning ko'rinishi o'zgarmaydi. Boshqacha aytganda, murakkab funksiya differensiali bilan funksiya differensiali ko'rinishi bir xil bo'lar ekan. Differen-sialning bu xususiyatiga uning *invariantligi* deyiladi.

Differensialning taqribiy hisoblashlarga tadbiqi.

y= f (x) funksiya x nuqtada chekli $f'(x) \neq 0$ hosilaga ega bo'lsa

$$\Delta y \cong dy \qquad (14.1.7)$$

Ravshanki, $|\Delta x|$ qanchalik kichik bo'lsa (14.1.7) tenglik shunchalik aniq bo'ladi. Ma'lumki,

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x; \qquad dy = f'(x)\Delta x \qquad (14.1.8)$$

$$(1) \overset{(2)}{\Rightarrow} f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x;\ \Rightarrow$$

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x \qquad (14.1.9)$$

Δy ni dy bilan almashtirganda $\Delta = |\,\Delta y - dy\,|$ absolyut xatoga va $\delta = \dfrac{\Delta}{|\Delta y|}$ nisbiy xatoga yo'l qo'yiladi.

Absolyut xatoni baholash uchun, ushbu

$$|\,\Delta y - dy\,| < max\,|\, f''(x)\,|\,\Delta x^2 \qquad (14.1.10)$$

tengsizlikdan foydalaniladi. Bu yerda $max\,|\, f''(x)\,|$ ikkinchi tartibli hosila modulining $[x, x + \Delta x]$ kesmadagi eng katta qiymati.

1-misol: $\sqrt{3{,}998}$ hisoblansin.

Yechilishi: To'g'ridan to'g'ri ildizni hisoblash murakkab. $x \in (0;+\infty)$ da $f(x) = \sqrt{x}$ funksiyani qaraymiz. Bu funksiya uchun (14.1.10) formula quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\sqrt{x+\Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}\cdot\Delta x.$$

Bu yerga $x+\Delta x = 3{,}998, \quad x = 4$ ni qo'yamiz:

$$\sqrt{3{,}998} \approx \sqrt{4} - \frac{1}{2\sqrt{4}}\cdot 0{,}002 = 1{,}995.$$

2-misol $\sqrt[5]{243{,}45}$ hisoblansin.

Yechilishi: $f(x) = \sqrt[5]{x}, \quad x \in R$ funksiya uchun (14.1.9) formula $\sqrt[5]{x+\Delta x} \approx \sqrt[5]{x} + \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}\cdot\Delta x$ ko'rinishni oladi.

Bunga $x+\Delta x = 243{,}45$ va $x = 243 = 3^5$ larni qo'yib $\sqrt[5]{243{,}45} \approx 3 + \frac{1}{5\cdot 81}\cdot 0{,}45 \approx 3{,}001$ hosil qilamiz.

3-misol: ln1,1 hisoblansin.

Yechilishi: $f(x) = \ln x; \quad 0 < x < +\infty$ funksiya uchun (14.1.9) formula $\ln(x+\Delta x) \cong \ln x + \frac{\Delta x}{x}$ ko'rinishni oladi. Bunga $x + \Delta x = 1{,}1$ yoki $x = 1$, $\Delta x = 0{,}1$ ni qo'ysak $\ln 1{,}1 \cong \ln 1 + \frac{1}{1}\cdot 0{,}1 = 0{,}1.$

Jadvaldan: $\ln 1{,}1 \cong 0{,}0953.$

4-misol: $\sin 45^0 06'$ hisoblansin.

Yechilishi: $f(x) = \sin x, \quad x \in R$ funksiyani qaraymiz.

(14.1.9) formula $\sin(x+\Delta x) \approx \sin x + \cos x \cdot \Delta x$ ko'rinishni oladi. Bu yerda $x + \Delta x = 45^0$ deb olamiz.

<u>**Eslatma:**</u> $1^0 = \frac{\pi}{180}; \quad 1' = \frac{\pi}{180\cdot 60}.$

Natijada: $\sin 45^0 06' \approx \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{1800} \approx \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3{,}14}{1800} \approx 0{,}7083.$

14.2. Yuqori tartibli hosilalar

y= f (x) funksiya biror intervalning har bir nuqtasida differensiallanuvchi bo'lsin. Bu holda, funksiyaning *y'= f '(x)* hosilasi *x* ning funksiyasi bo'ladi va u o'z navbatida hosilaga ega bo'lishi mumkin. Shu sababli, hosilaning hosilasi ikkinchi hosila yoki ikkinchi tartibli hosila deyiladi va $y'' = f''(x)$ yoki $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2f(x)}{dx^2}$ deb belgilanadi. Ikkinchi hosilaning hosilasi uchinchi hosila deyiladi va h.k.

Induksiya yordamida n - tartibli hosila (n–1) - tartibli hosilaning hosilasi deb aniqlanadi.

$y^{(n)} = f^{(n)}(x)$ yoki $\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d^nf(x)}{dx^n}$ ya'ni $(y^{(n-1)})' = y^{(n)}$.

Shunga o'xshash ravishda yuqori tartibli differensiallar tushunchasi kiritiladi. Masalan, x erkli o'zgaruvchi $dy = y'dx$ bo'lganda:

$$d^2y = d(dy) = y''dx^2 ;$$

$$d^3y = d(d^2 y) = y'''dx^2 ;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$d^ny = d(d^{n-1} y) = y^n dx^n .$$

Shuni ta'kidlash zarurki, yuqori tartibli differnsial invariantlik xususiyatiga ega emas.

1-misol: $y = a^x; \quad y^{(n)} -$ topilsin.

Yechilishi: $y' = a^x \cdot \ln a; \quad y'' = a^x \cdot \ln^2 a; \quad \ldots; \quad y^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a.$

2-misol: $y = x^\alpha; \quad y^{(n)} -$ topilsin.

Yechilishi:

$$y' = \alpha x^{\alpha-1}; \quad y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}; \quad y''' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}; \quad \ldots$$
$$y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}.$$

3-misol: $y = \sin x; \quad y^{(n)} -$ topilsin.

Yechilishi:

$$y' = \cos x \;= \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right); \quad y'' = -\sin x = \sin(\pi + 2\cdot\frac{\pi}{2}); \quad y''' = \sin(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}); \quad \ldots$$
$$y^{(n)} = \sin(x + n\cdot\frac{\pi}{2}).$$

Differensial hisobning asosiy teoremalari

Funksiya xossalarini tekshirishda, eng muhim tadbiqlar asosida Ferma, Roll, Lagranj teoremalari yotadi. Bu teoremalar odatda differensial hisobning asosiy teoremalari deyiladi.

Ferma teoremasi

Teorema: *f(x)* funksiya [a, b] oraliqda aniqlangan, uning ichki $x = c$ nuqtasida eng katta (eng kichik) qiymatini qabul qilsin. Agar bu c nuqtada chekli $f'(x)$ hosila mavjud bo'lsa, u holda $f'(c) = 0$ bo'ladi.

Isboti: $M=\sup\{f(x)\}$, $m=\inf\{(x)\}$, $x \in [a, b]$ bulsin. $f(c)=M$ deb faraz qilaylik, ya'ni $\forall x \in [a, b]$ uchun $f(x) \le f(c)$ bo'lsin.

Hosila ta'rifiga ko'ra

$f'(c) = \lim\limits_{\Delta x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$, (bunda $x=x_0+\Delta x$, $x_0 = c$ deb olingan)

bunda: $\forall\ x \in [c, b]$, $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \le 0 \Rightarrow \lim\limits_{\Delta x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \le 0$;

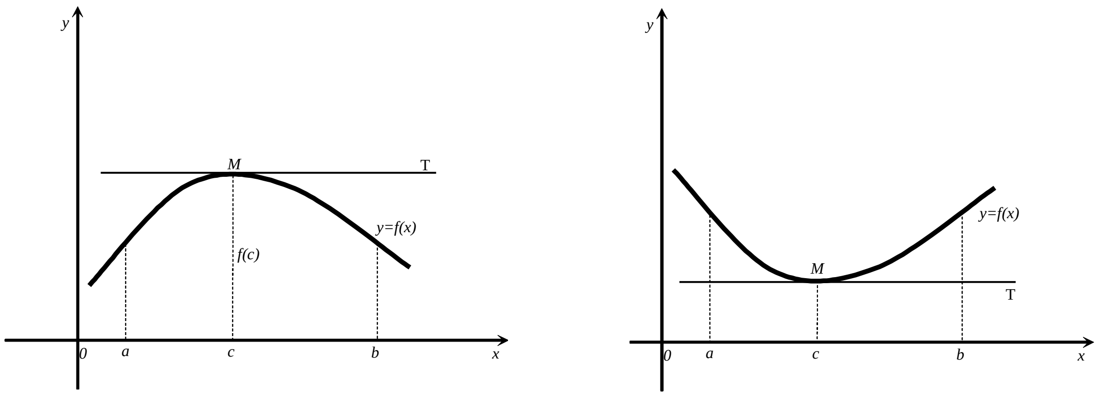
$\forall x \in [a, c]$, $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \ge 0 \Rightarrow \lim\limits_{\Delta x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \ge 0$;

$x \to c + 0$ va $x \to c - 0$ limitlarni takkoslab $f'(c) = 0$ degan xulosaga kelamiz.

Teorema $f(c)=m$ bo'lgan holda ham shunga o'xshash isbotlanadi.

Teorema geometrik ma'nosi

$f'(c)=0$ tenglik, funksiya grafigiga $M(c, f(c))$ nuqtadan o'tkazilgan urinma *Ox* o'qiga parallel ekanini bildiradi. (***5-shakl***)



5-shakl

Izoh: Teorema faqat funksiya oraliqning ichki nuqtasida eng katta (kichik) qiymatga erishgan hol uchun qo'llaniladi.

misol: $y = x^2$ funksiya Ferma teoremasi shartini $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ kesmada qanoatlantiradimi?

Yechilishi*:* *m = f(0) = 0, M = f(*1/2*)* = 1/4 ekanligiga ishonch hosil qilish murakkab emas.

$$f'(x) = 2x\Big|_{x=1/2} = 1 \neq 0; \qquad f'(x) = 2x\Big|_{x=0} = 0.$$

Shunday qilib, funksiya *x*=1/2 nuqtada eng katta qiymatga ega bo'lishiga qaramasdan, bu nuqtadagi chekli hosila nolga teng emas, ya'ni teorema bajarilmaydi.

Roll teoremasi

Teorema: Agar *f(x)* funksiya: 1) [*a, b*] kesmada uzluksiz; 2) [*a, b*] oraliqda chekli hosilaga ega; 3) *f(a) = f(b)* shartlarni qanoatlantirsa, u holda [a, b] da hyech bo'lmaganda bitta s nuqta topiladiki, f'(c) = 0 bo'ladi.

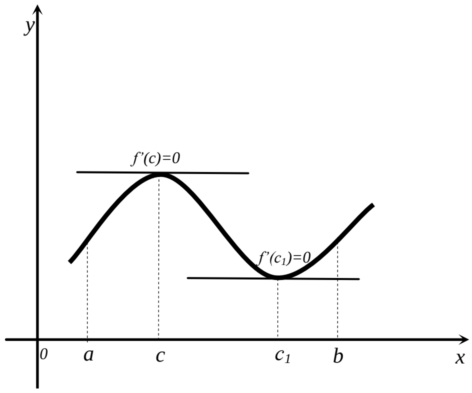
Isboti*:* Funksiya uzluksiz bo'lgani uchun u [*a, b*] kesmada o'zining eng katta va eng kichik qiymatlariga erishadi. Ikkita holni qaraymiz: $M = m$ va $M \neq m$;

1. Agar $M = m$ bo'lsa, $f(x)=const$ va $\forall x \in]a, b[$ da $f'(x) = 0$.

2. Agar $M \neq m$ bo'lsa, $f(a)= f(b)$ bo'lgani uchun funksiya hyech bo'lmaganda *M* va *m* qiymatlarning biriga erishadi va Ferma teoremasiga asosan $\exists c \in [a, b]$; $f'(c)= 0$.

Teoremaning geometrik ma'nosi

Egri chiziqqa (funksiya grafigiga) teoremaning hamma shartlari bajarilganda, o'tkazilgan urinma *Ox* o'qiga parallel bo'lgan kamida bitta nuqta topiladi.(*6-shakl*).

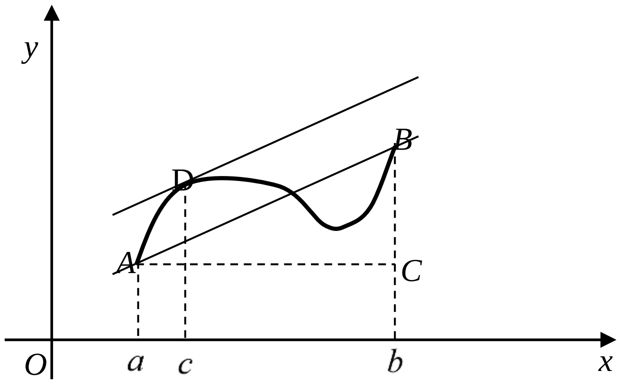


6-shakl

Lagranj teoremasi

Teorema: Agar *f(x)* funksiya: 1) [*a, b*] kesmada uzluksiz; 2) [*a, b*] oraliqda chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsa, bu holda kamida bitta $c\in[a,b]$ nuqta topiladiki $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Isboti: Geometrik tasvirdan foydalanamiz.(*7- shakl*)



7-shakl

Uzluksiz egri chiziqning $A(a,f(a))$, $B(b,f(b))$ nuqtalarini *(AV)* kesuvchi bilan tutashtiramiz. Ravshanki, bu kesuvchining burchak koeffisenti $(f(b)-f(a))/(b-a)$ ga teng. Egrilikning ixtiyoriy *M(x, y)* nuqtasidan urinma o'tkazamiz va uning *Ox* o'qqa og'gan burchagini φ bilan belgilaymiz va φ ni α ga intiltiramiz. Natijada, egrilikda shunday $N(c,f(c))$ nuqta topiladiki, bu nuqtadan o'tkazilgan *NT* urinma (*AV*) ga parallel bo'ladi ($\varphi=\alpha$ bo'lgan hol). Urinma burchak koeffisiyenti $k=tg\varphi=f'(c)$ bo'ladi. To'g'ri chiziq-larning parallellik shartidan:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \quad\Rightarrow\quad f(b)-f(a)=f'(c)(b-c)$$

Izoh: Roll teoremasi Lagranj teoremasining xususiy holidir.

15.DIFFERENSIAL HISOBNING BA'ZI TATBIQLARI

Reja:

1. Hosila yordamida funksiyani monotonlikka tekshirish.
2. Funksiya ekstremumlari. Funksiya grafigining qavariqligi va botiqligi. Funksiya grafigining asimptotalari
3. Lopital qoidalari.

Funksiya grafigining qavariqlik, botiqlik oraliqlarini va egilish nuqtalarini hosila yordamida tekshirish

1-ta'rif. $y = f(x)$ funksiyaning grafigi (a,b) oraliqning istalgan nuqtasidan unga o'tkazilgan urinmadan pastda yotsa, funksiya grafigi shu oraliqda **qavariq** deyiladi.

2-ta'rif. $y = f(x)$ funksiyaning grafigi (a,b) oraliqning istalgan nuqtasidan unga o'tkazilgan urinmadan yuqorida yotsa, funksiya grafigi shu oraliqda **botiq** deyiladi

3-ta'rif. Funksiya grafigining qavariq qismini, botiq qismidan ajratuvchi $M_0(x_0, f(x_0))$ nuqta **egilish** nuqtasi deyiladi.

Funksiya grafigining qavariq yoki botiq bo'lishining yetarli shartlari:

1) (a,b) oraliqda differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi manfiy, ya'ni $f''(x) < 0$ bo'lsa, bu oraliqda funksiya grafigi qavariq bo'ladi;

2) (a,b) oraliqda differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi musbat, ya'ni $f''(x) > 0$ bo'lsa, bu oraliqda funksiya grafigi botiq bo'ladi.

$f''(x) = 0$ va $f''(x)$ mavjud bo'lmagan nuqtalarga 2-tur kritik nuqtalar deyiladi

Egilish nuqtalari mavjud bo'lishining yetarli sharti. x_0 nuqta $y = f(x)$ funksiya uchun ikkinchi tur kritik nuqta bo'lsa va $f''(x)$ ikkinchi tartibli hosila bu nuqtadan o'tishda ishorasni o'zgartirsa, x_0 abssissali nuqta egilish nuqtasi bo'ladi.

Shunday qilib, funksiya grafigining qavariqlik va botiqlik oraliqlarini, egilish nuqtalarini topish uchun, oldin funksiya aniqlanish sohasini ikkinchi tur kritik nuqtalar bilan oraliqlarga bo'lish va bu oraliqlarda ikkinchi tartibli hosila ishorasini tekshirish kerak. Keyin yetarli shartlardan foydalanib, qavariqlik, botiqlik oraliqlari va egilish nuqtalari aniqlanadi

Funksiya grafigining asimptotalari.

1-ta'rif. $y = f(x)$ funksiya grafigidagi nuqta shu grafik bo'ylab cheksiz uzoqlashganda, undan biror to'g'ri chiziqqacha masofa no'lga intilsa, bu to'g'ri chiziq $y = f(x)$ funksiya grafigining **asimptotasi** deyiladi.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ bo'lsa, $x = a$ to'g'ri chiziq $y = f(x)$ funksiya grafigining vertikal asimptotasi bo'ladi $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ *va* $b = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - kx]$ yoki $k = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ *va* $b = \lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - kx]$

limitlar mavjud bo'lsa, $y = kx + b$ to'g'ri chiziq $y = f(x)$ funksiya grafigining og'ma asimptotasi bo'ladi. $k = 0$ bo'lsa, $y = b$ gorizantal asimptota bo'ladi.

1-misol. Gauss egri chizig'i deb ataluvchi $y = e^{-x^2}$ funksiya grafigining qavariqlik, botiqlik oraliqlarini va egilish nuqtalarini aniqlang.

Yechish. Birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarni topamiz:

$$y' = e^{-x^2}(-2x) = -2xe^{-x^2},\ y'' = -2\left[x'e^{-x^2} + (-2xe^{-x^2})x\right] = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$$

Ikkinchi tartibli hosilani nolga tenglashtirib, ikkinchi tur kritik nuqtalarni topamiz

$$(4x^2 - 2)e^{-x^2} = 0,\ e^{-x^2} \neq 0,\ 4x^2 - 2 = 0,\ x^2 = \frac{1}{2};\ x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}};\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Bular ikkinchi tur kritik nuqtalar bo'lib, sonlar o'qini

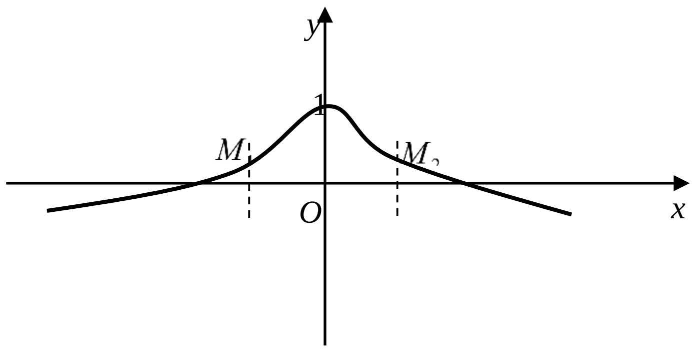
$(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ *ва* $(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$ oraliqlarga ajratadi.

$(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}),\ (\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$ oraliqlarda $y'' > 0$ bo'lib, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ oraliqda $y'' < 0$ bo'ladi

Demak $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ *ва* $(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$ oraliqlarda funksiya grafigi botiq $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ oraliqda funksiya grafigi qavariq bo'lib, $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ nuqtadan o'tishda $f''(x)$ o'z ishorasini musbatdan manfiyga, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ nuqtadan o'tishda manfiydan musbatga o'zgartiradi. Bu ikkala holda ham egilish bo'ladi

$$f_{эгл} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}) = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}};\ M_1(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{e}}).\ f_{эгл}(\frac{1}{\sqrt{2}}) = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}\ \ M_2(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}})$$

Yuqoridagilarga asosan funksiya grafigini yasaymiz



Funksiyani tekshirishning umumiy rejasi.

Funksiyani hosila yordamida tekshirishni hisobga olib, funksiyani tekshirishning quyidagi umumiy rejasini tavsiya etamiz:

1) funksiyaning aniqlanish sohasini topish hamda argumentning aniqlanish sohasi chetlariga intilganda funksiya o'zgarishini tekshirish;

2) funksiyaning juft-toqligini tekshirish;

3) funksiyaning davriyligini aniqlash;

4) funksiyaning uzluksizligi, uzilishini tekshirish;

5) funksiyaning kritik nuqtalarini aniqlash;

6) funksiyaning monotonlik oraliqlarini va ekstremumini tekshirish;

7) ikkinchi tur kritik nuqtalarni topish;

8) funksiya grafigining qavariqlik, botiqlik oraliqlarini va egilish nuqtalarini aniqlash;

9) funksiya grafigining asimtotalarini tekshirish;

10) imkoniyati bo'lsa funksiya grafigining koordinat o'qlari bilan kesishish nuqtalarini aniqlash;

11) yuqoridagi aniqlangan xususiyatlarni hisobga olib, funksiya grafigini yasash.

2-misol. $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$ funksiyani tekshiring.

Yechish. Funksiyani tekshirishning umumiy rejasidan foydalanamiz:

1) funksiya maxraji no’lga aylanadigan nuqtalardan boshqa hamma nuqtalarda aniqlangan. Maxraj $x_1 = -2, x_2 = 2$ nuqtalarda no’lga teng, demak, funksiyaning aniqlanish sohasi $(-\infty, -2),\ (-2;+2),\ (2, +\infty)$ oraliqlardan iborat. Aniqlanish oraliqlarining chetlarida funksiyaning o’zgarishini tekshiramiz:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2-4} = \lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2}{2x} = \frac{3}{2}\lim_{x\to-\infty} x = -\infty,\ \lim_{x\to-2-0}\lim\frac{x^3}{x^2-4} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-2+0}\lim\frac{x^3}{x^2-4} = \infty,\ \lim_{x\to2-0}\frac{x^3}{x^2-4} = -\infty,\ \lim_{x\to2+0}\frac{x^3}{x^2-4} = +\infty,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2-4} = \infty\ ;$$

2) $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x)^2-4} = -\dfrac{x^3}{x^2-4} = -f(x)$

bo’lganligi uchun toq funksiya;

3) funksiya $f(x+T) = f(x)$ tenglikni qanoatlantirmaydi, demak, davriy emas;

4) funksiya $x = \pm 2$ nuqtalarda uzilishga ega;

5) kritik nuqtalarni topamiz:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-4) - x^3 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2-4)^2},\quad f'(x) = 0,\ x = 0,\ x = \pm 2\sqrt{3}.$$

Bundan tashqari $f'(x),\quad x = \pm 2$ nuqtalarda mavjud emas. Demak, kritik nuqtalar:

$x_1 = -2\sqrt{3},\ x_2 = -2,\ x_3 = 0,\ x_4 = 2,\ x_5 = 2\sqrt{3}$

bo’ladi;

6) $(-\infty, -2\sqrt{3})$, $(-2\sqrt{3}, -2), (-2,0), (0,2), (2, 2\sqrt{3}), (2\sqrt{3}, +\infty)$

oraliqlarning har birida $f'(x)$ ning ishorasini tekshiramiz;

$(-\infty, -2\sqrt{3})$ *ва* $(-2\sqrt{3}, +\infty)$ oraliqlarda $f'(x)$ funksiya hosilasi musbat, ya’ni funksiya bu oraliqlarda o’suvchi; $(-2\sqrt{3}, -2), (-2,0), (0,2), (2, 2\sqrt{3})$ oraliqlarda $f'(x) < 0$, ya’ni kamayuvchi $x_1 = -2\sqrt{3}$ nuqtada funksiya maksimumga, $x_5 = 2\sqrt{3}$ nuqtada minimumga ega bo’ladi. $x = 0$ kritik nuqtadan o’tishda $f'(x)$ ishorasi o’zgarmaydi, demak bu nuqtada ekstremum yo’q.

$$\max f(x) = f(-2\sqrt{3}) = -3\sqrt{3};\ \min f(x) = f(2\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}\ ;$$

7) ikkinchi tur kritik nuqtalarni topamiz:

$$f''(x)=\frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}=\frac{(4x^3-24x)(x^2-4)^2-x^2(x^2-12)\cdot 2\cdot(x^2-4)\cdot 2x}{(x^2-4)^4}=$$

$$=\frac{(4x^3-24x)(x^2-4)-4x^3(x^2-12)}{(x^2-4)^3}=\frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}\ .$$

$$f''(x)=0,\quad 8x(x^2+12)=0,\quad x=0,\quad x=\pm 2$$

nuqtalarda ikkinchi tartibli hosila mavjud emas. Demak ikkinchi tur kritik nuqtalar

$$x_1=-2;\quad x_2=0;\quad x_3=2$$

bo'ladi ;

8) $(-\infty,-2),(-2,0)$, $(0,2)$, $(2,+\infty)$ oraliqlarda $f''(x)$ ning ishorasini tekshiramiz: $x=-3$ bo'lsin.

$$f''(-3)=\frac{8(-3)\left[(-3)^2+12\right]}{\left[(-3)^2-4\right]}=\frac{-24\cdot 21}{5^3}=-\frac{504}{125}<0,$$

xuddi shunday

$f''(-1)>0,\quad f''(1)<0,\quad f''(3)>0$ bo'lib, $(-\infty,-2)$ *ва* $(0,2)$ oraliqlarda funksiya grafigi qavariq, $(-2,0)$ *ва* $(2,+\infty)$ oraliqlarda funksiya grafigi botiq bo'ladi. Ikkinchi tartibli hosila har bir ikkinchi tur kritik nuqtada ishorasini o'zgartiradi, lekin $x=\pm 2$ da funksiya uzilishga ega. Shuning uchun faqat $x=0$ nuqtada funksiya grafigi egilishga ega bo'ladi $f(0)_{эгл}=0$;

9) funksiya grafigining asimptotalarini topamiz:

$$\lim_{x\to 2\pm 0}\frac{x^3}{x^2-4}=\pm\infty \quad ва \quad \lim_{x\to -2\pm 0}\frac{x^3}{x^2-4}=\pm\infty\,.$$

Demak, $x=-2,\ x=2$ funksiya grafigining vertikal asimgtotalari bo'ladi.

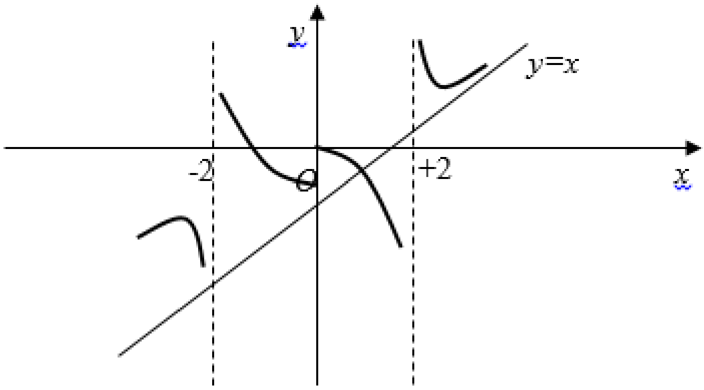
$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(x^2-4)}=1,\quad b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-4}-x\right)=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3+4x}{x^2-4}==\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{4/x}{1-4/x}=\frac{0}{1}=0.$$

Shunday qilib, $y=x$ og'ma asimptota bo'ladi;

10) $x=0$ bo'lganda $y=0$ bo'lib, funksiya grafigi koordinatalar boshidan o'tadi;

11) yuqoridagi tekshirishga asosan, funksiya grafigini yasaymiz. (2-chizma).



2-chizma

Funksiyaning egiluvchanligi (elastikligi).

Hosila yordamida erkli o’zgaruvchi (argument) orttirmasiga mos erksiz o’zgaruvchi (funksiya) orttirmasini hisoblash mumkin. Ko’p iqtisodiy masalalarni hal etishda **nisbiy orttirma,** ya’ni argumentning o’sish foiziga mos, funksiyaning o’sish foizini hisoblashga to’g’ri keladi. Bu funksiyaning egiluvchanligi yoki nisbiy hosila tushunchasiga olib keladi.

1-ta’rif. $\frac{\Delta x}{x}, \frac{\Delta y}{y}$ nisbatlarga, mos ravishda, argument va **funksiya nisbiy orttirmalari** deyiladi. Funksiya nisbiy orttirmasining argument nisbiy orttirmasiga nisbati $\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}$ ni qaraymiz.

Bu nisbatni quyidagicha yozamiz $\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y}$ $y = f(x)$ funksiyaning hosilasi mavjud bo’lsa $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{x}{y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx}$ (2)

kelib chiqadi.

2-ta’rif. (2) munosabatga $y = f(x)$ funksiyaning x ga nisbatan egiluvchanligi deyiladi, va $E_x(y)$ bilan belgilanadi. Ta’rifga asosan

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

bo’ladi.

x ga nisbatan egiluvchanlik argumentning orttirmasi 1% ga oshganda unga mos funksiya orttirmasining foizlarda hisoblangan o'sishi (yoki kamayishi)ni taqriban ifodalaydi.

Funksiya egiluvchanligini topishga bir necha misollar qaraymiz.

3-misol. $y = 3x - 6$ funksiya egiluvchanligini hisoblang.

Yechish: Egiluvchanlik ta'rifiga asosan

$$E_{\delta}(y) = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{x}{3x-6} \cdot 3 = \frac{3x}{3x-6} = \frac{x}{x-2}.$$

Masalan, $x = 10$ bo'lsa, funksiya egiluvchanligi

$\frac{10}{10-2} = \frac{5}{4}$ bo'ladi, ya'ni x 1% oshganda, y $\frac{5}{4}\%$ ga oshadi.

16.ANIQMAS INTEGRAL.

Reja:

1. Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral tushunchalari. Integralning sodda xossalari.
2. Aniqmas integrallar jadvali. Integrallash usullari. Tatbiqlari.

1. Boshlang'ich funksiya va uni topish.

Bizga $y = f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin, bu funksiyaning hosilasini topish amaliga differensiallash amali deyilar edi. Masalan, harakat tenglamasi $s = f(t)$ berilgan bo'lsa, uning t bo'yicha differensiallash bilan tezlikni topamiz. Yana bu tezlikni t bo'yicha differensiallasak tezlanish a ni topamiz. Biroq, amalada bunga teskari masalani ham yechishga to'g'ri keladi, ya'ni $a = a(t)$ tezlanish t vaqtning funksiyasi sifatida berilgan bo'lsa, t vaqtda o'tilgan s yo'lni va v tezlikni topish kerak bo'ladi. Buning uchun, bu yerda hosilasi $a = a(t)$ bo'lgan $v = v(t)$ funksiyani topib, so'ngra hosilasi v bo'lgan $s = s(t)$ funksiyani topish kerak bo'ladi. Ko'p masalalarda noma'lum funksiyaning berilgan hosilasi bo'yicha o'zini topishga to'g'ri keladi, ya'ni agar $y = f(x)$ funksiya berilgan bo'lsa, shunday $F(x)$ funksiyani topish kerakki, uning hosilasi berilgan funksiyaga teng bo'lsin $F'(x) = f(x)$.

<u>1-Ta'rif.</u> Agar $[a,b]$ kesmaning har bir nuqtasida $F'(x) = f(x)$ tenglik bajarilsa, u holda $F(x)$ funksiya berilgan $f(x)$ funksiyaning boshling'ich funksiyasi deyiladi.

Masalan, a) $f(x)=x^2$ berilgan bo'lsin. Uning boshlang'ich funksiyasi $F(x)=\frac{x^2}{3}$ bo'ladi, chunki $F'(x)=\left(\frac{x^3}{3}\right)'=\frac{3x^2}{3}=x^2$; b) Agar $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$ bo'lsa, uning boshlang'ich funksiyasi $F(x)=-ctgx$ ga teng, chunki $F'(x)=\left(-ctgx\right)'=\frac{1}{\sin^2 x}$.

Agar $f(x)$ funksiya $F(x)$ boshlang'ich funksiyaga ega bo'lsa, bunda $f(x)$ ning boshqa har qanday boshlang'ich funksiyasi $F(x)$ dan o'zgarmas C ga farq qiladi.

Masalan, $F(x)$ berilgan $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lsin, $G(x)$ esa $f(x)$ ning boshqa boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, $G(x)=F(x)+C$ bo'ladi, bu yerda C -o'zgarmas miqdor. Demak, agar $F(x)$ $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, u holda $F(x)+C$ ham $f(x)$ ni boshlang'ich funksiyasi bo'lib, u $f(x)$ ning barcha boshlang'ich funksiyalar to'plamini tashkil etadi. Bundan kelib chiqadiki $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyalari cheksiz ko'p bo'lar ekan. Masalan, $f(x)=x^2$, $F(x)=\frac{x^3}{3}$ edi. Lekin $F(x)=\frac{x^3}{3}+C$ ham boshlang'ich funksiya bo'ladi. Chunki $F'(x)=\left(\frac{x^3}{3}+C\right)'=x^2$. Endi aniqmas integralni ta'rifini keltiramiz.

<u>2-Ta'rif.</u> Agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, u holda $F(x)+C$ ifoda ham boshlang'ich funksiya bo'lib, $f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali deyiladi va $\int f(x)dx$ ko'rinishda yoziladi. Bu yerda $\int$ belgi integral belgisi, $f(x)$-integral ostidagi funksiya deyiladi. Shunday qilib, aniqmas integral $y=F(x)+C$ funksiyalar to'plamidan iborat bo'lar ekan.

Aniqmas integralning geometrik ma'nosi, tekislikdagi egri yoki to'g'ri chiziqlar oilasidan iborat bo'lib, bular bir chiziqning o'ziga parallel holda OY o'qi bo'ylab pastga yoki yuqoriga siljitishdan iborat bo'ladi. Har qanday uzluksiz funksiyaning boshlang'ich funksiyasi mavjud bo'ladi. Demak, bunday funksiyaning aniqmas integrali mavjuddir.

Funksiyani integrallash uchun uning boshlang'ich funksiyasini topish kerak bo'lar ekan. Shu sababli biror funksiyani integrallaganda topilgan boshlang'ich funksiyasidan hosila olib, integrallash natijasi tekshiriladi.

2. Aniqmas integralning xossalari.

a) Integral va differensial belgilari qarama-qarshi bo'lgani uchun ketma-ket kelganda qisqaradi, ya'ni $d\left(\int f(x)dx\right)= f(x)dx$. $\int df(x) = f(x)+C$. (C -konst).

b) a va b lar ixtiyoriy o'zgarmas sonlar bo'lganda

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C \quad \text{bo'ladi.}$$

v) Integraldan olingan hosila integral ostidagi funksiyaga teng, ya'ni

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = f(x) \text{ bo'ladi.}$$

g) Bir nechta algebraik funksiyalar yig'indisining aniqmas inetgarli shu funksiyalar integrallarining algebraik yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int [f_1(x)+ f_2(x)+...+ f_n(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + ... + \int f_n(x)dx.$$

d) O'zgarmas ko'paytuvchini integral belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, ya'ni agar C - const bo'lsa, $\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx$ bo'ladi.

Bu xossalarni integralni ta'rifidan foydalanib osongina isbotlash mumkin. Buni isboti talabalarga mustaqil ish sifatida topshiriladi.

16.2. Aniqmas integrallar jadvali. Integrallash usullari. Tatbiqlari

Hosilalar jadvalidan integrallar jadvali bevosita kelib chiqadi. Jadvalda keltirilgan tengliklarni to'g'riligini differensiallash yo'li bilan tekshirish, ya'ni tenglikni o'ng tomonidagi funksiyaning hosilasi integral ostidagi funksiyaga tengligini aniqlash mumkin.

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$ (C -const)

2. $\int \dfrac{1}{x}dx = \ln|x|+C$

3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a}+C$ (C -const, $a>0$)

4. $\int e^x dx = e^x + C$ $\quad (C\text{-const})$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

6. $\int \cos x dx = \sin x + C$

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

9. $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C$

10. $\int ctgx dx = \ln|\sin x| + C$

11. $\int lbx dx = x\ln x - x + C$

12. $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$

13. $\int dx = x + C$

14. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$ $\quad (C\text{-const}, \ a \neq 0)$

15. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$ $\quad (C\text{-const}, \ a \neq 0)$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$ $\quad (C\text{-const}, \ a \neq 0)$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C$ $\quad (C\text{-const}, \ a > 0)$

18. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C = \ln|\operatorname{cosec} x - ctgx| + C$ $\quad (C\text{-const})$

19. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C = \ln|tgx + \sec x| + C$

20. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = -\frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$

Yuqorida keltirilgan aniqmas integralning xossalaridan va integrallar jadvalidan foydalanib, aniqmas integralni topish yoki hisoblash mumkin.

Masalan, $\int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}} dx$ berilgan bo’lsin. Bu integralni hisoblaymiz

$$\int\frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\int\frac{x^4-2x^2+x^2-2}{x^{\frac{2}{3}}}dx=\int\frac{x^4-x^2-2}{x^{\frac{2}{3}}}=$$

$$=\int\left(\frac{x^4}{x^{\frac{2}{3}}}-\frac{x^2}{x^{\frac{2}{3}}}-\frac{2}{x^{\frac{2}{3}}}\right)dx=\int x^{\frac{10}{3}}dx-\int x^{\frac{4}{3}}dx-2\int x^{-\frac{2}{3}}dx=$$

$$=\frac{x^{\frac{10}{3}+1}}{\frac{10}{3}+1}-\frac{x^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1}-2\cdot\frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1}+C=\frac{3}{13}\sqrt[3]{x^{13}}-\frac{3}{7}\sqrt[3]{x^7}-6\sqrt[3]{x}+C.$$

Endi topilgan ifodadan hosila olsak, integral ostidagi funksiya kelib chiqsa, topilgan natija to'g'ri bo'ladi. Haqiqatan ham

$$\left(\frac{3}{13}x^{\frac{13}{3}}-\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}-6x^{\frac{1}{3}}+C\right)'=x^{\frac{10}{3}}-x^{\frac{4}{3}}-2x^{-\frac{2}{3}}=$$

$$=\frac{x^4-x^2-2}{x^{\frac{2}{3}}}=\frac{x^4-2x^2+x^2-2}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{x^2(x^2-2)+(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}$$

Demak, integrallash to'g'ri bajarilgan.

Integrallashga doir misollar.

1-misol. $\int\frac{1+2x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}dx$ aniqmas integralni hisoblang.

Yechish. Integral ostidagi funksiyani shaklini almashtirib, uni xossalaridan foydalanib hsoblaymiz.

$$\int\frac{1+2x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}dx=\int\frac{\left(1+x^2\right)+x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}dx=\int\left[\frac{1+x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}+\frac{x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}\right]dx=$$

$$\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{dx}{1+x^2}=-\frac{1}{x}+arctgx+C.$$

2-misol. $\int 8\sin^2\frac{x}{2}dx$ aniqmas integralni hisoblang.

Yechish. Integral ostidagi funksiya darajasini pasaytirish formulasidan foydalanib $2\sin^2\frac{x}{2}=1-\cos x$ bo'ganidan va integralni xossasidan foydalanib topamiz.

$$\int 8\sin^2\tfrac{x}{2}dx=8\int\sin^2\tfrac{x}{2}dx=4\int\left(1-\cos x\right)dx=4\int xdx-4\int\cos xdx=$$

$$4x-4\sin x+C=4\left(x-\sin x\right)+C.$$

3-misol. $\int 3^x e^{3x}dx$ aniqmas integralni hisoblang.

Yechish. $\int 3^x e^{3x}dx = \int \left(3e^3\right)^x dx = \dfrac{\left(3e^3\right)^x}{\ln\left(3e^3\right)} + C$.

4-misol. $\int \dfrac{x - \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ aniqmas integralni hisoblang.

Yechish. $\int \dfrac{x - \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int \dfrac{d\left(1-x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}} -$

$- \int \arcsin x d\left(\arcsin x\right) = -\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\arcsin^2 x + C$.

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $\int 2(3x-1)^2 dx.$
2. $\int \dfrac{(x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{2}})}{x}dx.$
3. $\int \dfrac{x^2dx}{x^3+1}.$
4. $\int \dfrac{dx}{x^2-25}.$
5. $\int 2^{x^2}xdx.$
6. $\int \dfrac{x^2dx}{\cos^2 x^3}.$
7. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{9-16x^2}}.$
8. $\int \dfrac{dx}{(4x+1)^4}.$
9. $\int \sqrt{x^2-a^2}dx.$

17.INTEGRALLASH USULLARI.

Reja:

1. Bevosita integrallash. Bo'laklab integrallash usuli.
2. Ratsional funksiyalarni integrallash. Trigonometrik va ba'zi irratsional funksiyalarni integrallash.

17.1.Bevosita integrallash. Bo'laklab integrallash usuli.

Aniqmas integralni hisoblashda integral ostidagi funksiyaning boshling'ich funksiyasi topiladi. Bu boshlang'ich funksiya yuqorida keltirilgan integral xossalaridan hamda integrallar jadvalidan foydalanib topiladi, bunga bevosita integrallash deyiladi. Bundan tashqari integrallashda o'zgaruvchini almashtirish va bo'laklab integrallash usullaridan foydalaniladi.

2. O'zgaruvchini almashtirish yoki o'rniga qo'yish usuli.

Bu usul bilan integrallashda o'zgaruvchi x yangi o'zgaruvchi t bilan ma'lum munosabatda shunday almashtiriladiki, natijada oddiy integralga ega bo'lamiz.

Bizga $\int f(x)dx$ berilgan bo'lsin, $x=\varphi(t)$ almashtirishni olaylik. Bundan $dx=\varphi'(t)dt$ ni topib, uni berilgan integralga qo'ysak. Qo'yidagi ifoda hosil bo'ladi.

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Bu esa berilgan integralga nisbatan ancha sodda bo'ladi. Umuman, integralni hisoblaganda turli almashtirishlar yordami bilan berilgan integral, jadvaldagi integrallardan birortasiga keltiriladi. So'ngra, jadvaldan boshlang'ich funksiya topiladi.

Ba'zan, berilgan integral $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx$ ko'rinishda berilgan bo'lsa, bunda $t=\varphi(x)$ almashtirish bilan integral juda soddalashadi. Haqiqatan, $t=\varphi(x)$, $dt=\varphi'(x)dx$

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx=\int \frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|\varphi(x)|+C$$

Bundan ko'rinadiki o'zgaruvchini almashtirish bilan integrallanganda chiqqan natija yana avvalgi o'zgaruvchi yordamida ifodalanar ekan, ya'ni t o'zgaruvchidan x o'zgaruvchiga o'tilar ekan.

Misol. Qo'yidagi integral hisoblansin: $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+2\cos x}}$, bunda $1+2\cos x=t$ deb olamiz. Bu holda $-2\sin x dx=dt$ bo'ladi. Demak,

$$\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+2\cos x}}=-\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}}=-\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt=-\frac{1}{2}\cdot 2t^{\frac{1}{2}}+C=$$

$$=-\sqrt{t}+C=-\sqrt{1+2\cos x}+C\,.$$

3. Bo'laklab integrallash usuli.

Bizga ikkita differensiallanuvchi $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar berilgan bo'lsin. Bu funksiyalar ko'paytmasi $(u \cdot v)$ ning differensialini topamiz. Ma'lumki, ko'paytmaning differensiali formulasidan $d(uv) = du \cdot v + u \cdot dv$

Bu ifodani har ikkala tomonini integrallab, qo'yidagini topamiz.

$$uv = \int vdu + \int udv \text{ yoki } \int udv = uv - \int vdu \qquad (17.1)$$

Yuqoridagi keltirilgan formula bo'laklab integrallash formulasi deyiladi. Bu formulani qo'llab integral hisoblanganda $\int udv$ ko'rinishdagi integral, ancha soda bo'lgan $\int vdu$ ko'rinishdagi integralga keltiriladi. Agar integral ostida $y = \ln x$ funksiya, yoki ikkita funksiyaning ko'paytmasi hamda teskari trigonometrik funksiyalar qatnashgan bo'lsa, bunda bo'laklab integrallash formulasi qo'llaniladi. Bu usul bilan integrallaganda yangi o'zgaruvchiga o'tishga hojat bo'lmaydi.

Umuman, aniqmas integralni hisoblashda topilgan natija yoniga o'zgarmas $C = const$ ni qo'shib qo'yish shart. Aks holda integralni bitta qiymati topilib, qolganlarini tashlab yubogan bo'lamiz. Bu esa integrallashda xatolikka yo'l qo'yilgan deb hisoblanadi.

Misol. $\int x arctgx dx$ ni hisoblang.

$$u = arctgx, \quad dv = xdx, \quad du = \frac{dx}{1+x^2}, \quad v = \int xdx = \frac{x^2}{2}$$

(bunda $C = 0$ deb olamiz) (17.1) formulani qo'llab

$$\int x \cdot arctgx dx = \frac{x^2}{2} arctgx - \int \frac{x^2}{2(1+x^2)} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} arctgx - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} arctgx + C = \frac{x^2+1}{2} arctgx - \frac{x}{2} + C .$$

17.2. Ratsional funksiyalarni integrallash. Trigonometrik va ba'zi irratsional funksiyalarni integrallash.

Bunday integrallarga asosan quyidagi integrallar kiradi.

1. $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$. 2. $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx$. 3. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

4. $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$. 5. $\int \sqrt{ax^2+bx+c}dx$ va 6. $\int (ax^2+bx+c)dx$.

Bunday integrallarni hisoblash uchun integral ostida qatnashgan uchhadni to'la kvadratga ajratib, ikki had kvadratining algebraik yig'indisiga keltiriladi. Natijada hosil bo'lgan ifodani integrallar jadvali yordamida integrallash mumkin bo'ladi. Kvadrat uchhadning to'liq kvadrati quyidagicha ajratiladi:

$$ax^2+bx+c=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})=a\left[(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]=$$

$$=a\left[(x+\frac{b}{2a})^2\pm k^2\right] \text{(bu yerda } \pm k^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}\text{)}$$

Bu yerdagi plyus yoki minus ishora ax^2+bx+c kvadrat uch hadning ildizlari haqiqiy yoki kompleks bo'lishiga qarab aniqlanadi, ya'ni b^2-4ac ni ishorasiga qarab. To'liq kvadrati ajratilgandan keyin yuqorida keltirilgan integrallarni mos ravishda I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 va I_6 lar bilan belgilasak, quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi.

1. $I_1=\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int \frac{dx}{(x+\frac{b}{2a})^2\pm k^2}$. Bunda $x+\frac{b}{2a}=t,\ dx=dt$ desak,

$I_1=\int \frac{dt}{t^2\pm k^2}$ ko'rinishga keladi, bu esa jadvaldagi integral.

1-Misol. a) $\int \frac{dx}{2x^2+8x+20}$ hisoblansin.

Yechish. $\int \frac{dx}{2x^2+8x+20}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+4x+10}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+4x+4+10-4}=$

$=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+2)^2}=I_1$. $x+2=t,\ dx=dt$ bo'ganidan.

$I_1=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+2}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{6}}arctg\frac{t}{\sqrt{6}}+C$. t o'rniga x orqali eski ifodani qo'yib, oxirgi natijani topamiz: $I_1=\frac{1}{2\sqrt{6}}arctg\frac{x+2}{\sqrt{6}}+C$.

2. $I_2=\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx=\int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)(B-\frac{Ab}{2a})}{ax^2+ba+c}dx=$

$=\frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ ikkita integralga keltirib

hisoblanadi, ularni I_1^* va I_1^{**} bilan belgilab, qo'yidagicha hisoblaymiz.

$$I_1^* = \int \frac{(2ax+b)}{ax^2+bx+c}dx = \begin{bmatrix} ax^2+bx+c=t \\ (2ax+b)dx = dt \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C =$$

$= \ln|ax^2+bx+c| + C$ (bu yerda c kichik, C esa katta).

$I_1^{**} = \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)I_1$ edi. Shuning uchun I_2 ko'rinishdagi

integral quyidagicha hisoblanar ekan $I_2 = I_1^* + I_1^{**} = \frac{A}{2a}\ln|ax^2+bx+c| + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)I_1$

2-Misol. $I_2 = \int \frac{x+3}{x^2-2x-5}dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $I_2 = \int \frac{x+3}{x^2-2x-5}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-2)+(3+\frac{2\cdot 1}{2})}{x^2-2x-5}dx =$

$$\frac{5}{2}\int \frac{(2x+2)}{x^2-2x-5}dx + 4\int \frac{dx}{x^2-2x-5} = \frac{1}{2}\ln|x^2-2x-5| + 4\int \frac{dx}{(x-1)^2-6} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-2x-5| + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}-(x-1)}{\sqrt{6}+(x-1)}\right| + C.$$

Demak, $I_2 = \frac{1}{2}\ln|x^2-2x-5| + \frac{2}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}-(x-1)}{\sqrt{6}+(x-1)}\right| + C$ bo'ladi.

3. $I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Bu integralni yuqoridagi qo'llanilgan almashtirishlar yordamida quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$a>0$ bo'lganda $I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{t^2 \pm k^2}}$. $a<0$ bo'lganda $I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{k^2-t^2}}$, bular esa jadvaldagi integrallardan iborat.

3-Misol. $I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-3}}$ integral hisoblansin. $x^2-4x-3 = (x-2)^2-7$

$dx = d(x-2)$, u holda $I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-3}} = \int \frac{d(x-2)}{\sqrt{(x-2)^2-7}} = \ln\left|x-2+\sqrt{(x-2)^2-7}\right| + C$.

Jadvaldagi integralga asosan hisobladik.

4. $I_4 = \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+(B-\frac{Ab}{2a})}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx =$

$= \dfrac{A}{2a}\int \dfrac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx + \left(B - \dfrac{Ab}{2a}\right)\int \dfrac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ ikkita integralga ajratib, ularni I_4^* va I_4^{**} bilan belgilab quyidagicha hisoblaymiz:

$$I_4^* = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \begin{bmatrix} ax^2+bx+c=t \\ (2ax+b)dx = dt \end{bmatrix} = \frac{A}{2a}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{A}{2a}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{A}{2a}a\sqrt{t} + C =$$

$$= \frac{A}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + C \ .$$

$I_4^{**} = \left(B - \dfrac{Ab}{2a}\right)\int \dfrac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \left(B - \dfrac{Ab}{2a}\right)I_3$ bo'lganligidan

$I_4 = I_4^* + I_4^{**} = \dfrac{A}{a}\sqrt{ax^2+ba+c} + \left(B - \dfrac{Ab}{2a}\right)I_3$ bo'ladi.

4-Misol. $I_4 = \int \dfrac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx$ integralni hisoblang.

Yechish $I_4 = \int \dfrac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx = \int \dfrac{\frac{5}{2}(2x+4)+(3-10)}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx =$

$$= \frac{5}{2}\int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx - 7\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+6}} = 5\sqrt{x^2+4x+10} -$$

$$-7\ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2+6}\right| + C = 5\sqrt{x^2+4x+10} - 7\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}\right| + C \ .$$

5. $I_5 = \int \sqrt{ax^2+bx+c}dx = \int \sqrt{a(x+\dfrac{b}{2a})^2 \pm k^2}dx =$

$= \left[\dfrac{b^2-4ac}{4a^2} = \pm k^2, \ x + \dfrac{b}{2a} = t, \ dx = dt\right]$ (deb olsak) $= \int \sqrt{a(t^2 \pm k^2}dt$ bu integral esa quyidagi formulalar yordamida hisoblanadi:

I. $\int \sqrt{t^2+b}dt = \dfrac{1}{2}\sqrt{t^2+b} + \dfrac{b}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+b}\right| + C$.

II. $\int \sqrt{a^2-t^2}dt = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2-t^2} + \dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{t}{a} + C$.

Misol 5. $\int \sqrt{x^2+2x+6}dx$ integralni hisoblang .

Yechish. Hisoblashda $x^2+2x+6 = (x+1)^2+5$ to'la kvadratini ajratib $t = (x+1)$ almashtirish olib, $d(x+1) = dt, b = 5$ belgilashdan keyin I formula yordamida topamiz

$$\int \sqrt{x^2+2x+6}dx = \int \sqrt{(x+1)^2+5}d(x+1) = \frac{x+1}{2}\sqrt{(x+1)^2+5} +$$

$$+\frac{5}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2+5}\right| + C .$$

6. $I_6 = \int (ax^2+bx+c)dx = a\int \left[(x+\frac{b}{2a})^2 \pm k^2\right]dx =$

$= \left[x+\frac{b}{2a} = t,\ dx = dt\right] = a\int (t^2 \pm k^2)dt$ jadval integraliga keltirib hisoblanadi.

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $\int 4\sqrt[3]{x} + 2x)dx$ ni xisoblang. J: $3\sqrt[3]{4x} + x^2 + C$

2. $\int x^2 \sqrt[5]{x}dx$ ni xisoblang. J: $\frac{5\sqrt[5]{x^6}}{16} + C$

3. $\int \frac{x^6-9}{x^3+3}dx$ ni xisoblang. J: $\frac{x^4}{4} - 3x + C$

4. $\int \cos 4x dx$ ni xisoblang. J: $\frac{1}{4}\sin 4x + C$

18.ANIQ INTEGRAL.

Reja:

1. Aniq integral tushunchasi. Aniq integralning asosiy xossalari.
2. Integral yig‘indilar va ularning limitiga keltiriluvchi masalalar
3. Integrallanuvchi funksiyalar sinfi.Tatbiqlari.

18.1. Aniq integral tushunchasi. Aniq integralning asosiy xossalari.

Aniq integral matematik analizning eng muxim tushunchalaridan biri. Egri chiziq bilan chegaralanagan yuzalarani, egr chiziqli yoylar uzunliklarini, hamda hajmlarni, bajarilgan ishlarni, yo’llarni, inersiya momentlarini va xokozalarni hisoblash masalasi shu tushuncha bilan bog’liqdir. $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo’lgan $y = f(x)$ funksiya berilgan bo’lsin. Quyidagi amallarni bajaramiz.

1. $[a,b]$ kesmani $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{j-1} < x_j < ... < x_n = b$ nuqtalar bilan n ta qismga bo’lamiz va ularni qismiy intervallar deb ataymiz.

2. Qismiy intervallarni uzunliklarini

$\Delta x_1 = x_1 - a,\ \Delta x_2 = x_2 - x_1, ..., \Delta x_j = x_j - x_{j-1}, ..., \Delta x_n = b - x_n$ bilan belgilaymiz.

3. Har bir qismiy interval ichida bittadan ixtiyoriy $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_j, ..., \xi_n$ nuqta tanlab olamiz.

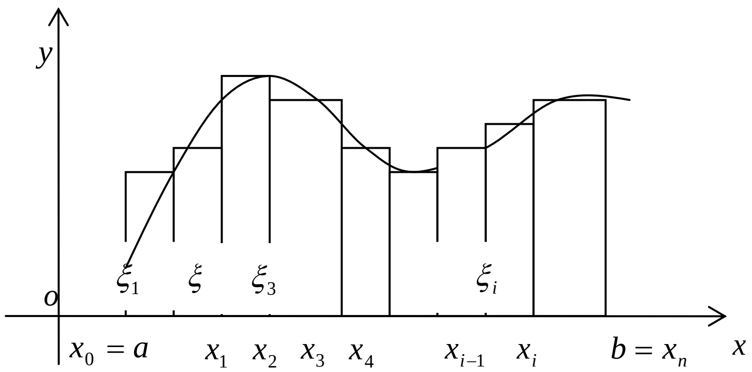
4. Tanlangan nuqtalarda funksiya qiymati $f(\xi_1), f(\xi_2), ..., f(\xi_j), ..., f(\xi_n)$ larni hisoblaymiz.

5. Funksiyaning hisoblangan qiymatlarining qismiy intervalning qismiy interval uzunligiga ko'paytiramiz. $f(\xi_1)\Delta x_1, f(\xi_2)\Delta x_2, ..., f(\xi_j)\Delta x_j, ..., f(\xi_n)\Delta x_n$

6. Tuzilgan ko'paytmalarni qo'shamiz va shu yig'indini σ_n bilan belgilaymiz

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1, f(\xi_2)\Delta x_2, ..., f(\xi_j)\Delta x_j, ..., f(\xi_n)\Delta x_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$



1-shakl

Integral yig'indining geometrik ma'nosi ravshan. Agar $f(x) \geq 0$ bo'lsa. U holda σ_n -asoslari $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ va balandliklari $f(\xi_1), f(\xi_2), ..., f(\xi_j), ..., f(\xi_n)$ bo'lgan to'g'ri to'rtburchak yuzlarining yig'indisiga teng bo'ladi (1-shakl). Endi bo'lishlar soni n ni orttira boramiz $(n \to \infty)$ va bunda eng kattta intervalning uzunligi nolga intilishini, ya'ni $\max \Delta x_i \to 0$ deb faraz qilamiz.

Ta'rif: Agar σ_n integral yig'indi $[a, b]$ kesmani qismiy $[x_i, x_{i-1}]$ kesmaga ajratish usuliga va ularning har biridan ξ_i nuqtaning tanlash usuliga bog'liq bo'lmaydigan chekli songa intilsa, u holda shu son $[a, b]$ kesmada $f(x)$ funksiyadan olingan aniq integral deyiladi va $\int_a^b f(x)dx$ kabi belgilanadi.

Bu yerda $f(x)$ integral ostidagi funksiya, $[a, b]$ kesma integrallash oralig'i, a va b sonlar integrallashning quyi va yuqori chegaralari deyiladi. Demak,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Aniq integralni ta'rifidan ko'rinadiki, aniq integral hamma vaqt mavjud bo'lmas ekan. Biz quyida aniq integralning mavjudlik teoremasini isbotsiz keltiramiz.

Teorema*:* Agar $y = f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u integrallanuvchidir, ya'ni bunday funksiyaning aniq integrali mavjuddir.

1-shakldagi $y = f(x) \geq 0$ funksiyaning grafigi quyidan OX o'qi, yon tomonlaridan $x = a,\ x = b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralanagan sohani egri chiziqli trapesiya deb atasak, u holda $\int_a^b f(x)dx$ aniq integralning geometrik ma'nosi ravshan bo'lib qoladi: $f(x) \geq 0$ bo'lganda u shu egri chiziqli trapesiyaning yuziga son jihatdan teng bo'ladi.

Aniq integarlning qiymati funksiyaning ko'rinishiga va integrallash chegarasiga bog'liq.

Masalan, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz$

Aniq integralning chegaralari almashtirilsa, integralning ishorasi o'zgaradi.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

Agar integralning chegarlari teng bo'lsa, har qanday funksiya uchun ushbu tenglik o'rinlidir $\int_a^a f(x)dx = 0$ Bularni isbotlash talabalarga mustaqil ish sifatida qoldiriladi.

18.2. Aniq integralning asosiy xossalari

O’zgarmas ko’paytuvchini aniq integral belgisidan tashqariga chiqarish mumkin**1-xossa**.

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \quad (k = const)$$

Isbot: $\int_a^b kf(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\Delta x_i = k \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i =$

$= k\int_a^b f(x)dx$ bo’ladi.

2-xossa. Bir nechta funksiyaning algebraik yig’indisining aniq integrali qo’shiluvchilar integrallarining yig’indisiga teng, ya’ni

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

3-xossa. Agar $[a,b]$ kesmada ikki $f(x)$ va $g(x)$ funksiya $(a < b)$ $f(x) \geq g(x)$ shartni qanoatlantirsa, ushbu tenglik o’rinli bo’ladi: $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

Isboti: Shartga ko’ra $f(x) \geq g(x)$ bo’lgani uchun $f(x) \geq g(x) \geq 0$ bo’ladi. Demak $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx \geq 0$ bo’ladi, bundan $\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \geq 0$ yoki $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$ kelib chiqadi.

4-xossa. Agar $[a,b]$ kesma bir necha qismga bo’linsa, u holda $[a,b]$ kesma bo’yicha aniq integral har bir qism bo’yicha olingan aniq integrallar yig’indisiga teng. $[a,b]$ kesma ikki qismga bo’lingan hol bilan cheklansak, $a < c < b$ bo’lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ bo’ladi.

5-xossa. Agar m va M sonlar $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmada eng katta va eng kichik qiymatlari bo’lsa, ushbu tengsizlik o’rinli bo’ladi $m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$

6-xossa. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzlusiz bo'lsa, bu kesmani ichida shunday $x=c$ nuqta topiladiki, bu nuqtada funksiyaning qiymati uning shu kesmadagi o'rtacha qiymatiga teng bo'ladi, ya'ni $f(c)=f_{ўрт}$ yoki

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

18.3. Aniq integralning yuqori chegarsi bo'yicha hosilash

7-xossa. Aniq integralda integrallashning quyi chegarasi a o'zgarmas bo'lib, yuqori chegarsi x esa o'zgaruvchi bo'lsa, u holda integralning qiymati ham o'zgaruvchi bo'ladi, ya'ni integral yuqori chegarasini funksiyasi bo'ladi. Bu funksiyani $\Phi(x)$ bilan belgilaymiz

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt \quad x\in[a,\, b]$$

Teorema: Agar $f(x)$ funksiya $x=t$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda $\Phi(x)$ funksiyaning hosilasi integral ostidagi funksiyaning yuqori chegarasidagi qiymatiga teng, ya'ni $\left(\int_a^x f(t)dt\right)'=f(x)$ yoki $\Phi'(x)=f(x)$. Bundan $\Phi(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi ekanligi kelib chiqadi.

Isbotlanmagan xossalar talablarga mustaqil ish uchun qoldirildi. Oxirgi teoremani isbotsiz qabul qilamiz. Bu teoremaga aniq integralni yuqori chegarasi bo'yicha hosila deyiladi.

19. ANIQ INTEGRALLARNI HISOBLASH.

Reja:

1. Nyuton—Leybnits formulasi.
2. Aniq integralda o'zgaruvchilarni almashtirish va bo'laklab integrallash.
3. Aniq integrallarni taqribiy hisoblash

19.1. Nyuton-Leybnis formulasi

Aniq integrallarni integral yig'indining limiti sifatida bevosita hisoblash ko'p hollarda qiyinchilik tug'diradi, ya'ni uzoq hisoblashlarni talab qiladi va amalda juda kam ishlatiladi. Aniq integrallarni topish asosan Nton-Leybnis formulasi deb ataluvchi quymdagi teorema bilan berilgan bo'ladi.

Teorema: Agar $F(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, u holda aniq integral boshlang'ich funksiyaning integrallash oralig'idagi orttirmasiga teng, ya'ni

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (19.2)$$

(2) tenglikka Nyuton-Leybnis formulasi deyiladi.

Isbot: $F(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, u holda 7-ma'ruzadagi 1-teoremaga asosan $\int_a^b f(t)dt$ funksiya ham $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi. Berilgan funksiyaning ikkita istalgan boshlang'ich funksiyalari bir-biridan o'zgarmas C qo'shiluvchiga farq qiladi, ya'ni $\Phi(x) = F(x) + C$. Shuning uchun: $\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$, C- o'zgarmas miqdorni aniqlash uchun bu tenglikda $x = a$ deb hisoblasak $\int_a^b f(t)dt = F(a) + C$. Aniq integrlning xossasiga asosan, $\int_a^a f(t)dt = 0$ bo'lgani uchun $F(a) + C = 0$. Bundan $C = -F(a)$ Demak, $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$. Endi $x = b$ deb oxirgi tenglikni hisoblasak, $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ ni hosil qilamiz. Bu tenglikda integrallash o'zgaruchisini x bilan almashtirsak $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ Nyuton- Leybnis formulasini hosil qilamiz. $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$ Belgilash kiritib, oxirgi formulani quyidagicha qayta yozish mumkin

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Teorema isbotlandi.

Demak, integral ostidagi $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi $F(x)$ ma'lum bo'lsa, u holda Nyuton-Leybnis formulasi aniq integrallarni hisoblash uchun amalda qulay usuldan iborat ekan. Faqat shu formulaning kashf etilishi aniq integralning hozirgi zamonda matematik analizda katta o'ringa ega ekanligiga imkon yaratgan. Nyuton-Leybnis formulasi aniq integralning tatbiqi sohasini ancha kengaytiradi, chunki matematika bu formula yordamida xususiy ko'rinishdagi turli masalalarni yechish uchun umumiy usulga egi bo'ldi.

Misollar ko'rib o'tamiz. Quyidagi aniq integrallarni hisoblang:

1. $\int\limits_a^b \frac{dx}{1+x^2} = arctgx\Big|_0^1 = arctg1 - arctg0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$.

2. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{8}} \frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int \left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} d(1+x^2) = \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{8}} =$

$= \sqrt{9} - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1$.

3. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 xdx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2x)dx = \frac{1}{2}(x - \sin 2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$.

19.2. Aniq integralda o'zgaruvchini almashtirish

Bizga $\int\limits_a^b f(x)dx$ aniq integral berilgan bo'lsin, bunda $f(x)$ funksiyani $[a,b]$ kesmada uzluksiz deb faraz qilamiz va $x=\varphi(t)$ deb yangi o'zgaruvchini kiritamiz, bunda $\varphi(t)$ funksiya va uning hosilasi $[\alpha, \beta]$ kesmada uzluksiz bo'lsin. Faraz qilaylik $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ bo'lsin. Bu shartlar bajarilganda quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi.

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Bu tenglikni isboti uchun formulani chap va o'ng tomonlariga Nyuton-Leybnis formulasini qo'llaymiz

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad (19.1)$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))\Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\beta)) = F(b) - F(a) \qquad (19.2)$$

Oxirgi ikki va tengliklarni o'ng tomonlari o'zaro teng bo'lganligidan ularni chap tomonlari ham teng bo'lishligini bilamiz. Demak, formula isbotlandi. Aniq integralni formula bo'yicha hisoblaganda yangi o'zgaruvchidan eski o'zgaruvchiga qaytish kerak emas, balki eski o'zgaurvchining chegaralarini keyingi boshlang'ich funksiyaga qo'yish kerak.

Misollar ko'rib o'tamiz. Quyidagi aniq integrallarni o'zgaruvchini almashtirish usulida hisoblang.

1. $\int_1^8 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$ bajaring

Yechish: $1+x^2=t^2$ deb almashtirish kiritamiz, $x=t^2-1$, $dx=2tdt$ bo'lganligidan va integrallashni yangi chegaralari $x=3$ bo'laganda $t=2$ hamda $x=8$ bo'lganda $t=3$ ekanligini hisobga olib berilgan integralni quyidagi xolga keltirib integrallaymiz:

$$\int_1^8 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}} = \int_2^3 \frac{(t^2-1)\cdot 2tdt}{t} = 2\int_2^3 (t^2-1)dt = 2\left(\frac{t^3}{2} - t\right)\Bigg|_2^3 =$$

$$= 2\cdot(6-\frac{2}{3}) = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}$$

2. $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx$ bajaring

Yechish: Bunda $x=\sin t$ deb almashtirish olamiz, u holda $dx=\cos tdt$ va integrallashni yangi chegaralarini $x=0$ bo'lganda $t=0$ hamda $x=1$ bo'lganda $t=\frac{\pi}{2}$ larni topib berilgan integralga qo'ysak:

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 tdt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t - \tfrac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi\right) - \left(0 - \frac{1}{2}\sin 0\right)\right] = \frac{\pi}{4} \text{ bo'ladi.}$$

19.3. Aniq integralni bo'laklab inegrallash

Faraz qilamiz, $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar $[a,b]$ kesmada differensillanuvchi funksiyalar bo'lsin. U holda $(uv)' = u'v + uv'$ bo'lishini bilamiz. Bu tenglikni har ikkala tamonini a dan b gacha bo'lgan oraliqda integrallaymiz. $\int_a^b (uv)' dx = \int_a^b u'vdx + \int_a^b v'udx$ Lekin bizga ma'lumki $\int (uv)' dx = uv + C$ ekanligi sababli $\int (uv)' dx = uv\Big|_a^b$ bo'ladi. U holda tenglikni $uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu + \int_a^b udv$ shaklda yozsak, bundan $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$ kelib chiqadi. Oxirgi formulaga, aniq integralda bo'laklab integrallash formulasi deyiladi.

Misollar: Quyidagi aniq integralni bo'laklab integrallang.

1. $\int_0^1 arctgxdx$

Yechish: $\int_0^1 arctgxdx = \left| \begin{array}{ll} u = arctgx, & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx, & v = x \end{array} \right| = x \cdot arctgx\Big|_0^1 - \int_0^1 \dfrac{xdx}{1+x^2} =$

$$= arctg1 - \frac{1}{2}\ln|1+x^2|\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 .$$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos dx = \left| \begin{array}{ll} u = e^{2x}, & du = 2e^{2x}dx \\ dv = \cos dx, & v = \sin x \end{array} \right| = e^{2x} \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin xdx = e^{\pi} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin xdx .$

Keyingi integralni yana bo'laklab, integrallaymiz. Buning uchun $u = e^{2x}$, $du = 2e^{2x}$, $dv = \sin xdx$, $v = \cos x$ bo'ladi va

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin xdx = -e^{2x} \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos xdx = = 1 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos xdx = 1 - 2I .$$

Buni berilgan integralga qo'ysak $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos xdx = e^{\pi} - 2 - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos xdx$.

O'xshashlarini integrallab quyidagi natijaga ega bo'lamiz $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos xdx = \dfrac{e^{\pi} - 2}{5}$.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1. $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx.$ 2. $\int_0^4 \sqrt{x}dx.$

3. $\int_0^{\pi/4} \cos 2xdx.$ 4. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx.$

5 a) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$; b) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}.$ 6. $\int_0^{\pi/2} 9\sqrt{3\sin x+1}\cdot\cos xdx.$

7. $\int_0^{\pi} \cos xdx$ .8. $\int_a^b \sqrt[3]{x^2}dx$

9. $\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sin xdx$ 10. $\int_{-1}^{3} (x^2-4+5)dx$

20. XOSMAS INTEGRALLAR.

Reja:

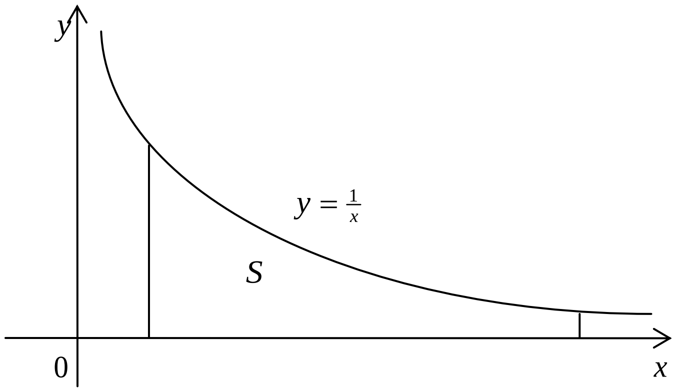
1. Birinchi va ikkinchi tur xosmas integrallar va ularning yaqinlashishi. Manfiy bo‘lmagan funksiyaning xosmas integrali
2. Xosmas integralning absolyut yaqinlashuvchiligi. Xosmas integralning yaqinlashuvchilik alomatlari.
3. Xosmas integrallarni hisoblash.Tatbiqlari.

Xosmas integrallar va ularning tiplari

Bizga ma’lumki $\int_a^b f(x)dx$ integralni ta’rifini berganda. 1) integralni chegarasi chekli va 2) integral ostidagi funksiya uzluksiz, ya’ni chegaralangan deb faraz qilgan edik. Shuning uchun ham biz hozirgacha shu ikkita shartdan birortasi bajarilmay qolgan holdagi funksiya integrali haqida hyech narsa deya olmaymiz. Lekin quyidagi ba’zi bir qo’shimcha ma’lumotlar yordamida bunday integrallar haqida tushunchamizni kengaytirishimiz mumkin. Bundan yuqoridagi ikkita shartdan birortasi bajarilmasa, bunday integrallarga xosmas integrallar deb, agar 1) shart bajarilmasa chegaralari cheksiz bo’lgan integrallar kelib chiqadi va biz uni 1-tur xosmas integrallar deb ataymiz, agarda 2) shart bajarilmasa, ya’ni uzilishga ega funksiyani integrallashga 2-tur xosmas integrallar deb atab ularni o’rganishga kirishamiz. Shulardan dastlab chegaralari cheksiz bo’lgan integrallarni qaraymiz.

20.1. Chegaralari cheksiz bo’lgan integrallar

Dastlab shu ko’rinishdagi integrallarga keltirilgan misollarni ko’rib o’tamiz.



1-misol. $y=\frac{1}{x}$, $x\ge a>0$ chiziqlar bilan chegaralangan S sohani yuzasini topaylik. Bizga ma’lumki, biz bilgan tushunchalar orqali bu sohani yuzasini topa olmaymiz. Lekin $x=b$ to’g’ri chiziq bilan egri chiziqli trapesiya hosil qilsak, bu egri chiziqli trapesiyaning yuzasi $\int_a^b \frac{dx}{x}$ ga teng bo’ladi. U holda $b\to\infty$ bo’lgandagi sohaning yuzasi hosil bo’ladi, ya’ni $S=\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b \frac{dx}{x}=\lim\limits_{b\to\infty}\ln\frac{a}{b}=\infty$. Demak, bu holda so’ralgan sohaning yuzasi haqida biror narsa ayta olmaymiz.

2-misol. $y=\dfrac{1}{x^2}$, $x\ge a>0$ chiziqlar bilan chegaralangan S sohaning yuzasini topamiz. 1-misoldagi kabi fikr yuritsak. $S=\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b \dfrac{dx}{x^2}=\lim\limits_{b\to\infty}\ln\left(-\dfrac{1}{x}\right)\Big|_a^b=\lim\limits_{b\to\infty}\left(-\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{1}{a}$ kelib chiqadi. Demak, bu sohaning yuzasi $\frac{1}{a}$ ga teng ekan, ya’ni sohamiz ko’rinishi cheksiz davom etishiga qaramay chekli yuzaga ega ekan. Bu misollardagi turli ko’rinishdagi natija $\dfrac{1}{x^2}$ ni $\dfrac{1}{x}$ ga nisbatan $x\to\infty$ da tezroq nolga intilgani tufaylidir. Yuqoridagi misollarni umumlashtirib $a\le x<\infty$ sohada uzluksiz bo’lgan $y=f(x)$ funksiya integralini ko’ramiz.

1-ta'rif. Agar b ni cheksiz o'sishi natijasida $\int_a^b f(x)dx$ integral aniq limitga intilsa, bu limitga yuqori chegarasi cheksiz bo'lgan $f(x)$ funksiyaning xosmas integrali deyiladi va $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ko'rinishda yoziladi. Uni hisoblash esa $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ bo'ladi. Bu holda xosmas integral yaqinlashuvchi yoki mavjud deyiladi. Agar limit mavjud bo'lmasa, yoki cheksiz bo'lsa, bu xosmas integralga majud emas yoki uzoqlashuvchi deyiladi. Demak, 1-misolimizdagi $\int_a^{\infty}\frac{dx}{x}$ xosmas integral uzoqlashuvchi, 2-misoldagi xosmas integral $\int_a^{\infty}\frac{dx}{x^2}$ ga esa yaqinlashuvchi bo'lar ekan. Xuddi shuningdek boshqa chegaralari cheksiz bo'lgan integrallar ham aniqlanadi va quyidagicha hisoblanadi.

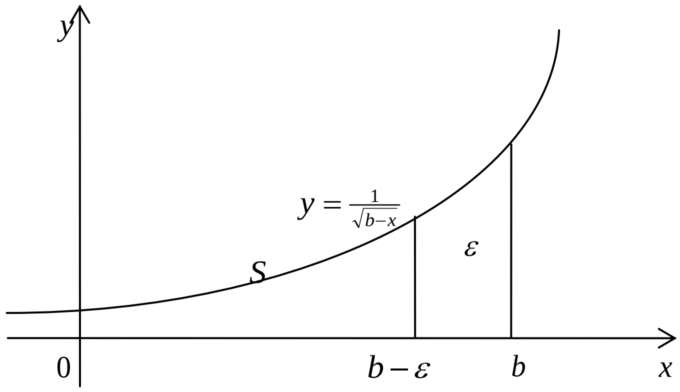
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx \quad \text{va} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$$

O'ng tomonda turgan xosmas integrallarni har biri yaqinlashuvchi bo'lsa, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

20.2. Uzilishga ega funksiya integrali

Biz berilgan oraliqda uzilishga ega bo'lgan funksiyalardan olingan integrallarni quyidagi misollarda ko'rib chiqamiz.

1-misol. $y=\frac{1}{\sqrt{b-x}}$, $0\le x\le b$ chiziqlar bilan chegaralangan soha yuzasi S ni topaylik. Bu funksiya $x=b$ nuqtada aniqlangan.



Chizmadagi soha cheksiz davom etuvchi soha bo'lganligi uchun, bizga ma'lum bo'lgan usul bilan yuzani topa olmaymiz. Agar sohani $x=b-\varepsilon$ to'g'ri chiziq bilan kessak, hosil bo'gan egri chiziqli trapesiya yuzasi $S=\int_0^{b-\varepsilon} f(x)dx$ bo'lib, $\varepsilon\to 0$ da so'ralgan sohani yuzasini hosil qilamiz va

$$S=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{b-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{b-x}}dx=-\lim_{\varepsilon\to 0}2\sqrt{b-x}\Big|_0^{b-\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-2\sqrt{b-b+\varepsilon}+2\sqrt{b}\right)=2\sqrt{b}$$

natijaga ega bo'lamiz. Bu hollarda aniq integral tushunchasini chegaralanmagan integral ostidagi funksiya tushunchasi bilan umumlashtirish mumkin bo'ladi. Shu sababli quyidagi ta'rifni keltiramiz.

2-ta'rif. Agar $\varepsilon\to 0$ da $\int_0^{b-\varepsilon} f(x)dx$ aniq integral chekli limitga intilsa, bu limitga uzilishga ega funksiyaning xosmas integrali deyiladi. Bu holda xosmas integral yaqinlashuvchi deyiladi. Agar bu limit mavjud bo'lmasa yoki chekli bo'lmasa, xosmas integral uzoqlashuvchi deyiladi. Xuddi shuningdek, integral ostidagi fuknsiya $x=a$ nuqtada aniqlanmagan yoki $x=a$ da uzilishga ega bo'lsa $\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ yoki $x=c$ da $c\in[a,b]$ uzilishga ega bo'lsa,

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx+\int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx\right)$$

formula yordamida tekshiriladi yoki hisoblanadi. Agar o'ng tomondagi har bir integral mavjud va chekli bo'lsa, oxirgi ko'rinishdagi xosmas integral yaqinlashuvchi bo'ladi.

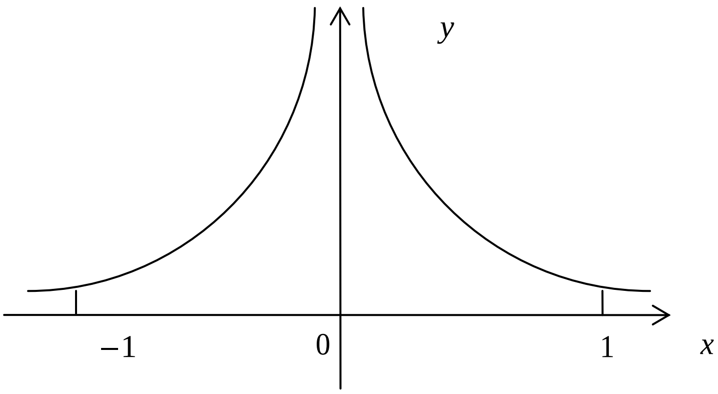
2-misol. $I=\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$ integralga Nyuton-Leybnis formulasini qo'llasak $I=-2$ hosil bo'ladi. Aslida, musbat funksiyaning integrali musbat son bo'lishi kerak. Bu yerdagi qarama-qarshilik uzoqlashuvchi bo'lgan xosmas integralga Nyuton-Leybnis formulasini to'g'ridan-to'g'ri qo'llash natijasida kelib chiqadi. Haqiqatan ham, $f(x)=\frac{1}{x^2}$ funksiya $x=0$ da cheksizlikka aylanadi. U holda

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon\to-0}\int\limits_{-1}^{\varepsilon}\frac{dx}{x^2}+\lim_{\eta\to+0}\int\limits_{\eta}^{1}\frac{dx}{x^2},$$

$$\lim_{\varepsilon\to-0}\int\limits_{-1}^{\varepsilon}\frac{dx}{x^2}=-\lim_{\varepsilon\to-0}\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{\varepsilon}=-\lim_{\varepsilon\to-0}\left(\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{-1}\right)=\infty,$$

$$\lim_{\eta\to+0}\int\frac{dx}{x^2}=-\lim_{\eta\to+0}\frac{1}{x}\Big|_{\eta}^{1}=-\lim_{\eta\to+0}\left(1-\frac{1}{\eta}\right)=\infty,$$

bo'lgani uchun xosmas integral uzoqlashuvchidir.



3-misol. Xuddi shunga o'xshash, $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}}=6$ bo'lganligi uchun xosmas integral yaqinlashuvchi bo'ladi.

20.3. Xosmas integralning yaqinlashishi belgilari

Ba'zi hollarda xosmas integralning aniq qiymatini hisoblash shart bo'lmay, uning yaqinlashishini bilish kifoya bo'ladi. Bu hollarda xosmas integrallarni yaqinlashishi (yoki uzoqlashishi) ma'lum bo'lgan xosmas integrallar bilan taqqoslash qulaydir. Shu maqsadda quyidagi xosmas integrallarni taqqoslashga asoslangan teoremani keltiramiz.

1-teorema. $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar $[a,+\infty)$ intervalda uzluksiz va $0 \le \varphi(x) \le f(x)$ shartni qanoatlantirsa.

a) agar $\int_a^{\infty} f(x)dx$ integral yaqinlashuvchi bo'lsa, $\int_a^{\infty} \varphi(x)dx$ ham yaqinlashuvchi bo'lib,

$$\int_a^{\infty} f(x)dx \ge \int_a^{\infty} \varphi(x)dx$$

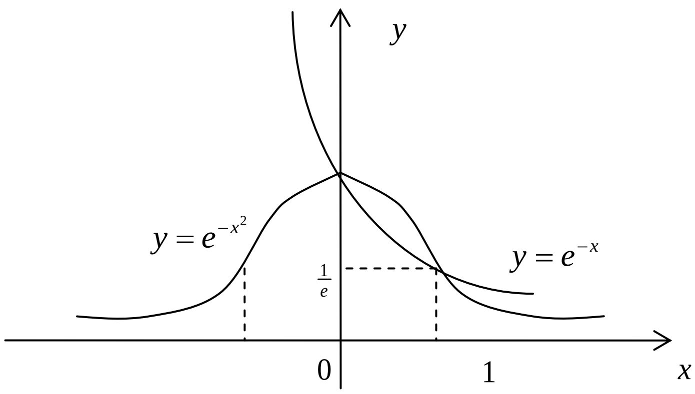
bajariladi.

b) agar $\int_a^{\infty} \varphi(x)dx$ integral uzoqlashuvchi bo'lsa, $\int_a^{\infty} f(x)dx$ ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

Bu teoremani isbotsiz qabul qilib, quyidagi misollarni ko'rib chiqamiz.

1-misol. $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$ (Puasson integrali) ni tekshiring. Bu integralning ehtimollar nazariyasida ahamiyati juda katta. $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \int_0^{1} e^{-x^2}dx + \int_1^{\infty} e^{-x^2}dx$. Birinchi integral $\int_0^{1} e^{-x^2}dx$ da xosmaslik yo'q. $[0,1]$ da Gauss egri chizig'i bilan chegaralangan soha yuzini ifodalaydi, ya'ni aniq sondan iborat. $\int_1^{\infty} e^{-x^2}dx$ integralni qaraymiz. Ma'lumki, $0 \le e^{-x^2} \le e^{-x}$, $x \ge 1$ da

$$\int_1^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-x}\right)\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(\tfrac{1}{e^b} + e^{-1}\right) = \tfrac{1}{e}.$$



$\int_1^{\infty} e^{-x^2} dx$ yaqinlashuvchi bo'lganligidan yuqoridagi tengsizlikka asosan berilgan xosmas integral yaqinlashuvchidir.

2-misol. $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ integralni tekshiring. Ma'lumki, $\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$ bo'lganligi uchun $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ xosmas integral yaqinlashuvchi ekanligidan, berilgan xosmas integral absolyut yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

3-ta'rif. $\int_a^{\infty} f(x)dx$ absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi, agar $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ yaqinlashuvchi bo'lsa, $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ uzoqlashuvchi bo'lib, $\int_a^{\infty} f(x)dx$ yaqinlashuvchi bo'lsa, shartli yaqinlashuvchi bo'ladi.

2-teorema. Faraz qilaylik $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar $[a, b]$ intervalda $0 \le \varphi(x) \le f(x)$ tengsizlikni qanotlantirib, shu intervalda uzluksiz bo'lsin va $x = b$ nuqtada uzilishga ega bo'lsin. U holda a) agar $\int_a^b f(x)dx$ integral yaqinlashuvchi bo'lsa, $\int_a^b \varphi(x)dx$ ham yaqinlashuvchi. b) $\int_a^b \varphi(x)dx$ integral uzoqlashuvchi bo'lsa, $\int_a^b f(x)dx$ integral ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

3-misol. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 2-tip xosmas integralni tekshiring. $x = 1$ da uzilishga ega $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}} \le \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ (chunki, $x^4 \le x, 1-x^4 \ge 1-x,\ x \in [0, 1]$)

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{1-\varepsilon} (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{\varepsilon\to 0} 2\sqrt{1-x}\Big|_{1-\varepsilon}^{0} = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(2 - 2\sqrt{\varepsilon}\right) = 2,$$

yaqinlashuvchi. U holda teorema shartiga asosan berilgan integral ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

3-teorema. Agar $f(x)$ funksiya ishorasini $[a, c]$ kesmada uzluksiz, $x = c$ nuqtada uzilishga ega bo’lsa va $\int_a^c |f(x)|dx$ yaqinlashsa, unda $\int_a^c f(x)dx$ ning ham yaqinlashishi kelib chiqadi.

Mustaqil yechish uchun misollar

1-misol. $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ (Puasson integrali) ni tekshiring.

2-misol. $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2} dx$ integralni tekshiring.

3-misol. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 2-tip xosmas integralni tekshiring.

21. ANIQ INTEGRALNING TADBIQLARI.

Reja:

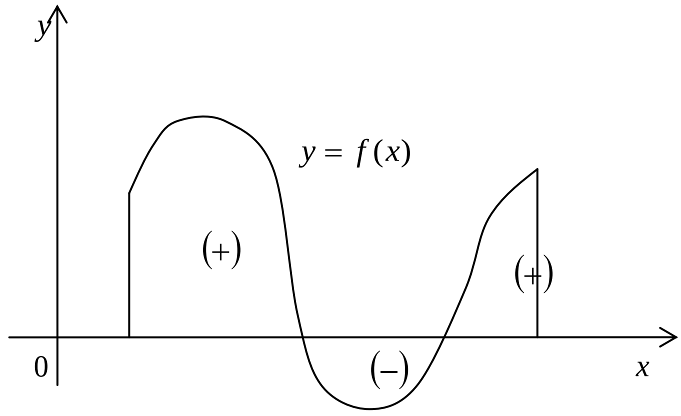
1. Egri chiziqli trapetsiyaning yuzi. Egri chiziq yoy uzunligini hisoblash.
2. Jism hajmi. Aylanma sirtning yuzi.
3. O‘zgaruvchan kuchning bajargan ishi

21.1. Figuralar yuzalarini Dekart va qutb koordinatalarida hisoblash

a) Bizga ma’lumki, agar $[a, b]$ kesmada uzlusiz bo’lgan $f(x) \geq 0$ bo’lsa, u holda $y = f(x)$ egri chiziq OX o’qi va $x = a$ hamda $x = b$ to’g’ri chiziqlar Bilan chegaralangan egri chiziqli trapesiyaning yuzi

$$S = \int_a^b f(x)dx \qquad (21.1.1)$$

bilan hisoblanar edi. Agar $[a, b]$ kesmada $f(x) \leq 0$ bo’lsa, u holda aniq integral $\int_a^b f(x)dx \leq 0$ bo’ladi. Absolyut qiymatiga ko’ra bu integralning qiymati ham tegishli egri chiziqli trapesiyaning yuziga teng: $S = \int_a^b |f(x)|dx$ (21.1.1’)



1-shakl

Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada ishorasini chekli son marta o'zgartirsa, u holda integralni butun $[a, b]$ kesmada qismiy kesmachalar bo'yicha integrallar yig'indisiga ajaratamiz. $f(x) > 0$ Bo'lgan kesmalarda integral musbat, $f(x) < 0$ bo'lgan kesmalarda integral manfiy bo'ladi. Butun kesmalar bo'yich olingan OX o'qidan yuqorida va pastda yotuvchi yuzalarning tegishli algebraik yig'indsini beradi. (2-shakl). Yuzalar yig'indisini odatdagi ma'noda hosil qilish uchun yuqorida ko'rsatilgan kesmalar bo'yicha olingan integrallar absalyut qiymatlari yig'indisini topish yoki $S = \int_a^b |f(x)|dx$ integralni hisoblanadi.

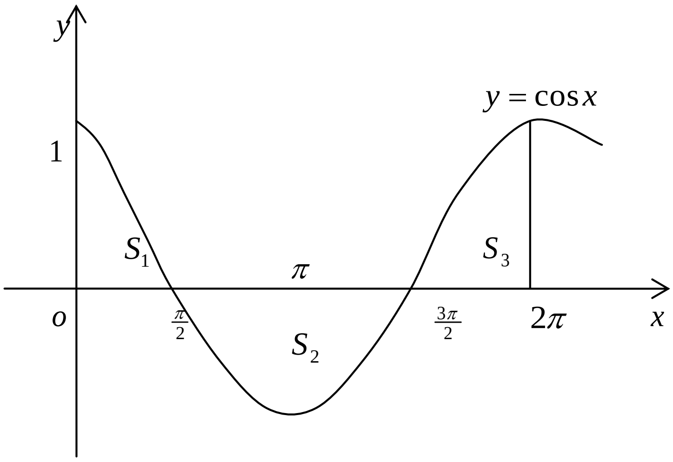
b) Agar $y_1 = f_1(x)$ va $y_2 = f_2(x)$ egri chiziqlar hamda $x = a$ va $x = b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegarlangan figurani yuzini hisoblash kerak bo'lsa, u holda $f_1(x) \geq f_2(x)$ shart bajarilgan figuraning yuzi quyidagiga teng:

$$S = \int_a^b \left(f_1(x) - f_2(x) \right) dx \qquad (21.1.2)$$

1-misol. $y = \cos x,\ y = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan yuzani $x \in [0, 2\pi]$ oraliqda hisoblang.

Yechish*:* Shaklini yasaymiz.

Formulga asosan $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ va $x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ da $\cos x \geq 0$ hamda $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ da $\cos x \leq 0$ bo'lagni uchun



2-shakl.

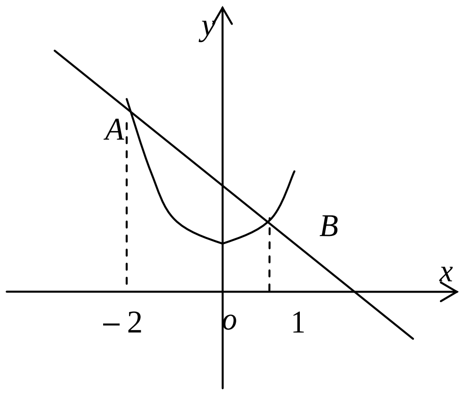
$$S = \int_0^{2\pi} |\cos x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-\cos x) dx \right| + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + |\sin x| \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + \sin x \Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} =$$

$$= \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 + \left| \sin \frac{3\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} \right| + \sin 2\pi - \sin \frac{3\pi}{2} = 1 + |-1-1| - (-1) = 4 \text{ kv.b.}$$

Demak, $S = 4$ *kv.b*.

2-misol. $y = x^2 + 1$ va $y = 3x$ chiziqlar bilan chegaralanagan figuraning yuzi hisoblansin.

Yechish: Figurani yasash uchun avval, ushbu sistemani $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = 3 - x \end{cases}$ yechib, chiziqlarni kesishish nuqtalarini topamiz.



Bu chiziqlar $A(-2, 5)$ va $B(1, 2)$ nuqtalarda kesishadi. U holda (21.1.2) formulaga asosan

$$S=\int_{-2}^{1}(3-x)dx-\int_{-2}^{1}(x^2+1)dx=\int_{-2}^{1}(2-x-x^2)dx=(2x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3})\Big|_{-2}^{1}=(2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3})-(-4-\frac{4}{2}-\frac{8}{3})=\frac{9}{2}=4{,}5$$

kv.b.

g) Agar egri chiziqli trapesiya hosil qiluvchi chiziqlar parametrik shaklidagi $x=\varphi(t),\ y=\psi(t)$ tenglamalari bilan berilgan bo'lsa, bunda bu tenglamalar $[a,b]$ kesmadagi biror $y=f(x)$ funksiyani aniqlaydi, bunda $t=\in[\alpha,\beta]$ va $\varphi(\alpha)=a,\ \psi(\beta)=b$. U holda egri chiziqli trapesiyani yuzini $S=\int_a^b ydx$ formula bilan hisoblash mumkin bo'ladi.

Bu integralda o'zgaruvchini almashtramiz $x=\varphi(t)$, $dx=\varphi'(t)dt$, $y=f(x)=f(\varphi(t))=\psi(t)$

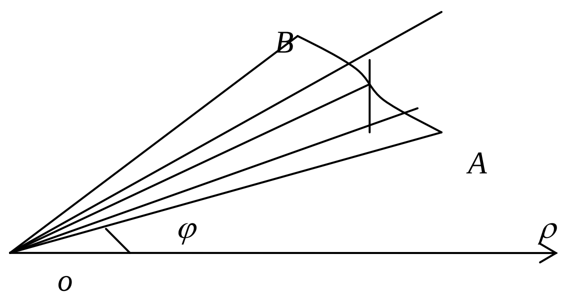
bo'lganligidan $S=\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt$.

Bu formula chiziq parmetrik shakldagi tenglamasi bilan berilganda egri chiziqli trapesiyani yuzini hisoblash formulasidir.

3-misol. $x=a\cos t,\ y=b\sin t$ ellips bilan chegaralangan sohaning yuzi hisoblansin.

Yechish. Ellipsning yuqori yarim yuzini hisoblab, uni 2 ga ko'paytirmiz $-a\le x\le a$ uchun $-a=a\cos t,\ \cos t=-1,\ t=\pi$. $a=a\cos t,\ \cos t=1,\ t=0$ ni topamiz, u holda formulaga asosan, $S=2\int_\pi^0 b\sin t(-a\sin tdt)=-2ab\int \sin^2 tdt=\pi ab$ kv.b.

2. AB egri chiziq qutb koordinatalarida $\rho=\rho(\varphi)$ formula bilan berilgan va $\rho(\varphi)$ funksiya $[\alpha,\beta]$ kesmada uzluksiz bo'lsin.



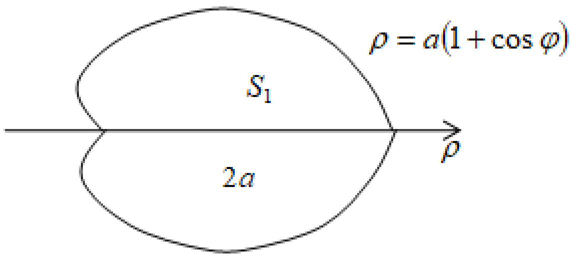
Ushbu $\rho=\rho(\varphi)$ egri chiziq va qutb o'qlari bilan α va β burchak hosil qiluvchi 2ta $\varphi=\alpha,\ \varphi=\beta$ nurlar bilan chegaralanagan egri chiziqli sektorni yuzini hisoblaymiz.

Buning uchun berilgan yuzani $\alpha=\varphi_0,\varphi_1,...,\varphi_n=\beta$ nurlar bilan n-ta ixtiyoriy qismlarga bo'lamiz. O'tkazilgan nurlar orasidagi burchaklarni $\Delta\varphi_1,\Delta\varphi_2,...,\Delta\varphi_n$ bilan belgilaymiz. φ_{i+1} Bilan φ_i orasidagi biror $\overline{\varphi_i}$ burchakka mos nurning uzunlgini $\overline{\rho_i}$ orqal belgilaymiz. Radiusi $\overline{\rho_i}$ va markaziy burchak $\Delta\varphi_i$ bo'lgan doiraviy sektorni qaraymiz. Uning yuzi $\Delta S_i=\frac{1}{2}\overline{\rho}_i^2\Delta\varphi_i$ ga teng bo'ladi. U holda ushbu yig'indi $S_n=\sum_{i=1}^{n}\overline{\rho}_i^2\Delta\varphi_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[f(\overline{\rho}_i]^2\Delta\varphi_i$ Zinapoyasimon sektorni yuzini beradi. Bu yig'indi $\alpha<\varphi<\beta$ kesmada $\rho^2=[f(\varphi)]^2$ funksiyaning integral yig'indisi bo'lganlgi sababali, uning limiti $\max\Delta\varphi_i\to 0$ da $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\rho^2d\varphi$ aniq integralga teng. Bu $\Delta\varphi_i$ burchak ichidagi qanday ρ_i nur olishimizga bog'liq emas. Demak, OAB sektorning yuzi $S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\rho^2d\varphi=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta[f(\varphi)]^2d\varphi$ formula bilan topilar ekan.

4-misol. $\rho=a(1+\cos\varphi),\ a>0$ kardoida bilan chegarangan figuraning yuzini hisoblang.

Yechish: Kardioridani shaklini yasaymiz.

Formulaga asosan $S=2S_1=2\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\rho^2d\varphi=\int_\alpha^\beta\rho^2d\varphi$



$$S=\int_0^\pi a^2(1+\cos\varphi)^2d\varphi=a^2\int_0^\pi(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)d\varphi=\ a^2\int_0^\pi(\tfrac{3}{2}+2\cos\varphi+\tfrac{1}{2}\cos2\varphi)d\varphi=$$

$=a(\frac{3}{2}\varphi+2\sin\varphi+\frac{1}{4}\sin4\varphi)\Big|_0^\pi==\frac{3}{2}\pi a^2$ Demak, karoidaning yuzi $S=\frac{3}{2}\pi a^2$ *kv.b.*

21.2. Egri chiziq yoyining uzunligini Dekart va qutb koordinatalarida hisoblash

a) Dekart koordinatalari sistemasida egri chiziq yoyining uzunligini hisoblash. Tekslikda to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida egri chiziq $y = f(x)$ tenglama berilgan bo'lsin. Bu egri chiziqning $x = a$ va $x = b$ vertekal to'g'ri chiziqlar orasidagi AB yoyning uzunligini hisoblaymiz. AB Yoyida abssissalari $a = x_0, x_1, ..., x_i, ..., x_n = b$ bo'lgan $A, M_1, M_2, ..., M_i, ..., B$ nuqtalarni olamiz va $AM_1, M_1M_2, ..., M_{n-1}B$ vatarlarni o'tkazamiz. Ularning uzunliklarini mos ravishda $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$ lar bilan belgilaymiz. AB yoy ichiga chizilgan siniq chiziqning uzunligi $S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$ bo'lgani uchun AB yoyning uzunligi $S = \lim_{\max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$ bo'ladi. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya va uning $f'(x)$ hosilasi $[a, b]$ kesmada uzlusiz bo'lsin.

U holda $\Delta S_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)}\Delta x_i$ yoki Lagranj teoremasiga asosan $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi)$ bo'lganligidan $(x_{i-1} < \xi_i < x_i)$ shartida $\Delta S_i = \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2}\Delta x_i$ bo'ladi. Ichki chizilgan siniq chiziqlarning uzunligi esa $S_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2}\Delta x_i$ bo'ladi. Shartga ko'ra, $f'(x)$ funksiya uzluksizdir, demak, $\sqrt{1 + f'(\xi_i)^2}\Delta x_i$ funksiya ham uzluksizdir. Shuning uchun integral yig'indining limiti mavjud va u quyidagi aniq inetgralga teng:

$$S = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2}\Delta x = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$$

Demak, yoy uzunligini hisoblash formulasi $S = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}\,dx$ ko'rinishga ega bo'ladi.

Agar egri chiziq parametrik shaklidagi $x = \varphi(t), y = \psi(t) \quad (\alpha \le t \le \beta))$ tenglamasi bilan berilgan bo'lsa va $\varphi'(t) \ne 0$ bo'lganda bu tenglama biror $y = f(x)$

funksiyani aniqlaydi, bu funksiya uzluksiz bo'lib, $\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ uzluksiz hosilaga ega,

$a=\varphi(\alpha),\ b=\psi(\beta)$ bo'lsin. (9) integralda

$x=\varphi(t),\ dx=\varphi'(t)dt$ almashtirish bajaramiz. U holda

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{1+(\tfrac{\varphi'(t)}{\psi'(t)})^2}\varphi'(t)dt \text{ yoki } S=\int_{a}^{b}\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}dt \text{ bo'ladi.}$$

Bu formulaga tenglamasi parametrik shaklda berilgan yoy uzunligini hisoblash formulasi deyiladi.

Qutb koordinatalar sistemasida egri chiziq yoyining uzunligini hisoblash.

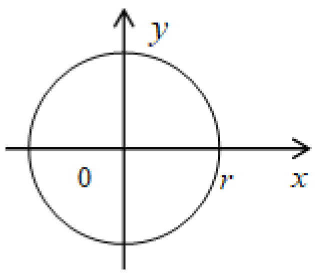
Tenglamasi qutb koordinatalar sistemasida bo'lgan $\rho=\rho(\varphi)$ egri chiziq berilgan bo'lsin. Qutb koordinatalaridan Dekart koordinatalariga o'tish formulasi $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$ dan foydalansak va unga formulani tatbiq qilsak $\frac{dx}{d\varphi}=\rho'\cos\varphi-\rho\sin\varphi$, $\frac{dy}{d\varphi}=\rho'\sin\varphi+\rho\cos\varphi$ bo'ladi. U holda $\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2=\left(f'(\varphi))^2+(f(\varphi)\right)^2=\rho'^2+\rho^2$ bo'ladi.

Demak, formulani ko'rinishi $S=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\rho'^2+\rho^2}d\rho$ bo'ladi. Bu formulaga qutb koordinatalarida egri chiziq yoyining hisoblash formulasi deyiladi.

5-misol. $x^2+y^2=r^2$ aylana uzunlgi hisoblansin.

Yechish: Dastlab, aylananing birinchi kvadrantda yotgan qismini hisoblab, uni 4ga ko'paytiramiz. U holda AB yoy tenglamasi $y=\sqrt{r^2-x^2}$, $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$

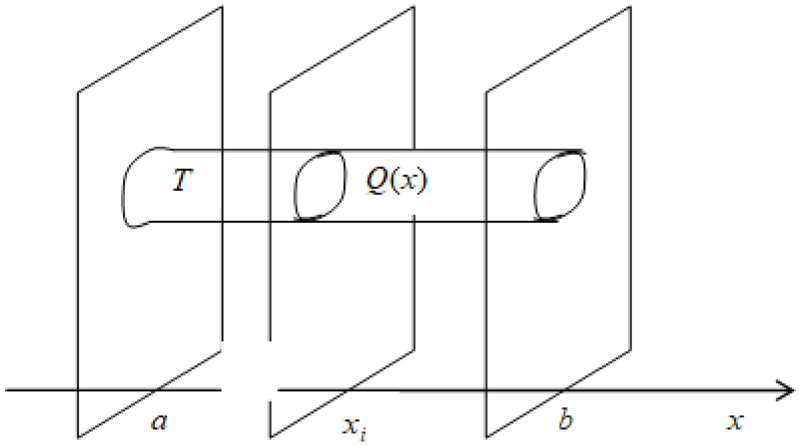
bo'lganidan $\frac{1}{4}S=\int_0^r\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}dx=\int_0^r\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}dx=r\arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^r=r\cdot\frac{\pi}{2}$.



Butun aylana uzunligi $S=2\pi r$ bo'ladi.

21.3. Jism hajmini parallel kesimlarning yuzalari bo'yicha hisoblash

Biror T jism berilgan bo'lsin. Bu jismni OX o'qqa perpendikulyar tekislik bilan kesishdan hosil bo'lgan har qanday kesimni yuzi ma'lum deb faraz qilamiz. Bu holda yuza kesuvchi tekislikning vaziyatiga bog'liq, ya'ni x ning funksiyasi bo'lsin $Q(x)$.



$Q(x)$ ning $[a, b]$ oraliqda uzluksiz funksiya deb qarab, berilgan jism hajmini aniqlaymiz. Shu maqsadda $[a, b]$ oraliqda $x = x_0 = a, x = x_1, x = x_2, ..., x = x_n = b$ tekisliklarni o'tkazamiz. Har bir $x_{i-1} \le x \le x_i$ qismiy oraliqda ixtiyoriy ξ_i nuqta tanlab olamiz va i ning har bir qiymati uchun yasovchi x lar o'qiga parallel bo'lib, yo'naltruvchisi T jismni $x = \xi_i$ tekislik bilan kesishdan hosil bo'lgan kesimning konturidan iborat bo'lgan silindrik jism yasaymiz. Asosining yuzi $Q(x)$ ga, balandligi Δx_i bo'lgan bunday elementar silindrning hajmi $Q(\xi_i)\Delta x_i$ ga teng. Hamma silindrning hajmi $V_n = \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i)\Delta x_i$ bo'ladi. Bu yig'indidan $\max \Delta x_i \to 0$ dagi limitni hisoblasak, bu limit berilgan jismning hajmiga teng bo'ladi. $V = \lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i)\Delta x_i$.

V_n miqdor $[a, b]$ kesmada uzluksiz $Q(x)$ fuknsiyaning integral yig'indisidir, shuning uchun bu limit mavjud va u, $V = \int_a^b Q(x)dx$ aniq integral bilan hisoblanadi.

1-misol. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ ellipsoidning hajmi hisoblansin.

Yechish: Ellipsoidning OXZ teksilikka parallel bo'lib, undan x masofa uzoqlikdan o'tgan tekislik bilan kesganda yarim o'qlari $b_1 = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, $c_1 = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ bo'lgan

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2}=1$$

ellips hosil bo'ladi. Bu ellipsning yuzi $Q(x)=\pi b_1c_1=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$. U holda, ellipsoidning hajmi formulaga asosan $V=\pi bc\int_a^b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi bc\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi abc$ kub b.g teng bo'ladi.

21.4. Aylanma jismning hajmi

$y=f(x)$ egri chiziq, OX o'q va $x=a,\ x=b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralngan egri chiziqli trapesiyaning OX o'qi atrofida aylanishdan hosil bo'lgan jismni qaraylik. Bu jismni abssissalar o'qiga perpendikulyar tekislik bilan kesishdan hosil bo'lgan ixtiyoriy kesma doira bo'ladi. Uning yuzi $Q(x)=\pi y^2=\pi\big(f(x)\big)^2$. Hajmni hisoblash umumiy formlani qo'llab, aylanma jismning hajmini hisoblash formulasi

$$V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b\big(f(x)\big)^2dx \qquad (13)$$

ni hosil qilamiz. Xuddi shuningdek OY o'q atrofida aylanishdan hosil bo'lgan jism hajmi

$$V=\pi\int_c^d x^2dy=\pi\int_c^d\big(f(y)\big)^2dy \qquad (14)$$

topiladi.

2-misol. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipsning OX va OY o'qlari atrofida aylantirish natijasida hosil bo'lgan jismlarning hajmini hisoblang.

Yechish: Ellips tenglamasidan $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$, $x^2=\frac{a^2}{b^2}(b^2-y^2)$ topamiz va formulalarni qo'llab

$$V = 2V_1 = 2\pi\int_0^a y^2dx = 2\pi\frac{b^2}{a^2}\int_0^a (a^2 - x^2)dx = 2\pi\frac{b^2}{a^2}(ax - \frac{x^3}{3})\Big|_0^a = 2\pi\frac{b^2}{a^2}(a^3 - \frac{a^3}{3}) = \frac{4}{3}\pi ab^2 .$$

Demak, $V = \frac{4}{3}\pi ab^2$ (kub b.). Endi OY atrofida aylanishdan hosil bo'lgan jismni hajmini topamiz

$$V = 2V_1 = 2\pi\int_0^b x^2dy = 2\pi\frac{a^2}{b^2}\int_0^b (b^2 - a^2)dy = 2\pi\frac{a^2}{b^2}(b^2y - \frac{y^3}{3})\Big|_0^b = 2\pi\frac{a^2}{b^2}(b^3 - \frac{b^3}{3}) = \frac{4}{3}\pi a^2 b .$$

Demak, $V = \frac{4}{3}\pi a^2 b$ (kub b.).

21.5. Ishni va jismlarni inersiya momentini aniq integral yordamida hisoblash

Biror F kuch ta'siri ostida M moddiy nuqta OS to'g'ri chiziq bo'yicha harakat qilsin, bunda kuchning yo'nalshi harakat yo'nalshi bilan bir xil bo'lsin. M nuqta $S = a$ holatdan $S = b$ holatga ko'chganda F kuchning bajargan ishi topilsin.

1) Agar F kuch o'zgarmas bo'lsa, u holda A ish F kuch bilan o'tilgan yo'l uzunligi ko'paytmasi bilan ifodalanadi $A = F(b - a)$

2) F kuch moddiy nuqtaning olgan o'rniga qarab uzluksiz o'zgarsin, ya'ni $[a, b]$ kesmada $F(S)$ uzluksiz funksiyani ifodlasak, u holda $[a, b]$ kesmani uzunliklari $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$ bo'lgan n -ta ixtiyoriy bo'lakka bo'lamiz va har bir $[S_{i-1}, S_i]$ qismiy kesmada ixtiyoriy ξ_i nuqta tanlab olamiz. $F(S)$ Kuchning ΔS_i yo'lida bajargan ishini $F(\xi_i)\Delta S_i$ ko'paytma bilan almashtiriamiz. Oxirgi ifoda ΔS_i yetarlicha kichik bo'lganda F kuchning ΔS_i yo'lida bajarilgan ishning taqribiy qiymatini beradi:

$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta S_i$$

Bu yig'indidan $\max \Delta S_i \to 0$ da limiti $F(S)$ kuchning $S = a$ nuqtadan $S = b$ nuqtgacha bo'lgan yo'lda bajargan ishini ifodalaydi va $A = \int_a^b F(S)dS$ formula bilan hisoblanadi.

3-misol. Agar prujina 1 N kuch ostida 1 sm cho'zilishi ma'lum bo'lsa. Uni 4 sm cho'zish uchun qancha ish bajarish kerak?

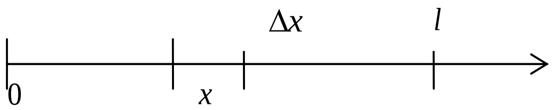
Yechish: Guk qonuniga ko'ra prujinani x m ga cho'zuvchi kuch $F = kx$ bilan topiladi. Agar $x = 0{,}01$ m va $F = 1$ N ekanlgini hisobga olsak, u holda $k = \frac{F}{x} = \frac{1}{0{,}01} = 100$ kelib chiqadi, $A = \int_0^{0{,}04} 100x dx = 50x^2 \Big|_0^{0{,}04} = 0{,}08$ (J) ga teng bo'ladi.

3) XOY tekislikda massalari $m_1, m_2, ..., m_n$ bo'lgan $P_1(x_1, y_1), P(x_2, y_2), ..., P_n(x_n, y_n)$ moddiy nuqtalar sistemasi berilgan bo'lsin. Mexanikadan bizga ma'lumki, moddiy nuqtalar sistemasining O nuqtaga nisbatan inersiya momenti: $I_0 = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + y_i^2) m_i = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 m_i$ bunda $r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$.

Faraz qilaylik, egri chiziq moddiy chiziqdan iborat bo'lib, u $y = f(x)$ tenglama bilan berilgan bo'lsin. Egri chiziqni chiziqli zichligi γ ga teng bo'lsin. Bu chiziqni uzunliklari $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$ bo'lgan n ta bo'laklarga bo'lamiz, bunda $\Delta S_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$ ularning massalari $\Delta m_1 = \gamma \Delta S_1$, $\Delta m_2 = \gamma \Delta S_2$, ..., $\Delta m_n = \gamma \Delta S_n$ bo'lsin. Yoylarning har bir qismida abssissasi ξ_i va ordinatasi $\eta_i = f(\xi_i)$ bo'lgan nuqtalar olamiz. Yoyning O nuqtaga nisbatan inersiya momenti $I_0 \approx \sum_{i=1}^{n} (\xi_i^2 + \eta_i^2) \cdot \gamma \Delta S_i$. Agar $y = f(x)$ funksiya va uning hosilasi $f'(x)$ uzluksiz bo'lsa, u holda $\Delta x_i \to 0$ da yig'indi limitga ega va bu limit moddiy chiziqning inersiya momentini ifodalaydi:

$$I_0 = \gamma \int_a^b (x + f(x)) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

4) Uzunligi l bo'lgan ingichka bir jinsli tayoqchaning (sterjenning) oxirgi uchiga nisbatan inersiya momenti. Tayoqchani OX o'q kesmasi bilan ustma-ust joylashtiramiz, $0 \le x \le l$.



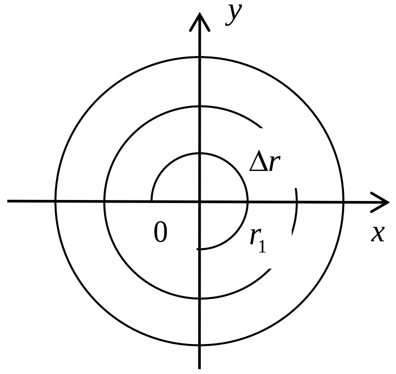
U holda $\Delta S_1 = \lambda x_1, \Delta S_2 = \gamma x_2, ..., r_i^2 = x_i^2$ bo'lib, formuladan $I_{ol} = \gamma \int_0^l x dx = \gamma \frac{l^3}{3}$

Agar tayoqchani massasi M berilgan bo'lsa, u holda $\gamma = \frac{M}{l}$ va formulaga ko'ra $I_{ol} = \frac{1}{3} M \cdot l^2$

5) Radiusi r bo'lgan aylananing markazga nisbatan inersiya momenti. Aylananing barcha nuqtalari uning markazidan bir xil masofada bo'lgan va massasi $m = 2\pi r \gamma$ uchun aylananning inersiya momenti

$I_0 = mr^2 = \gamma 2r \cdot r^2 = 2\pi r^3 \gamma$ bo'ladi.

6) Radiusi R bo'lgan bir jinsli doiraning markaziga nisbatan inersiya momentini topish uchun doirani n ta xalqalarga ajratamiz. S –doira yuzi birligini massasi bo'lsin. Bitta xalqani olib qaraymiz. Bu xalqning ichki radiusi r_i tashqi rdiusi $r_i + \Delta \kappa$ bo'lsin, massasi $\Delta m_i = \delta 2\pi r_1 \Delta r_1$ ga teng bo'ladi. Bu massani markazga nisbatan inersiya momenti formulaga asosan $(\Delta I_0) \approx \delta 2\pi r_i \Delta r_i \cdot r_i^2 = \delta 2\pi r_i^3 \Delta r_i$ ga teng. Bu doiraning inersiya momenti



$I_0 \approx \sum \delta 2\pi r_i^3 \Delta r_i$. Bundan $\Delta r_i \to 0$ da limitga o'tsak $I_0 = \delta 2\pi \int r^3 dr = \pi \delta \frac{R^2}{2}$

formulani hosil qilamiz. Agar doiraning massasi M bo'lgan bo'lsa, u holda sirt zichligi δ -quyidagiga teng $\delta = \frac{M}{\pi R^2}$. Buni ga qo'ysak, $I_0 = \frac{MR^2}{2}$ bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun misollar

1-misol. $y=\cos x,\ y=0$ chiziqlar bilan chegaralangan yuzani $x\in[0,2\pi]$ oraliqda hisoblang.

2-misol. $y=x^2+1$ va $y=3x$ chiziqlar bilan chegaralanagan figuraning yuzi hisoblansin.

3-misol. $x=a\cos t,\ y=b\sin t$ ellips bilan chegaralangan sohaning yuzi hisoblansin.

4-misol. $\rho=a(1+\cos\varphi),\ a>0$ kardoida bilan chegarangan figuraning yuzini hisoblang.

5-misol. $x^2+y^2=r^2$ aylana uzunlgi hisoblansin.

6-misol. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ellipsoidning hajmi hisoblansin.

7-misol. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ellipsoidning hajmi hisoblansin.

22.SONLI QATORLAR VA ULARNING YAQINLASHISHI

Reja:

1. Sonli qator tushunchasi, uning yaqinlashishi va uzoqlashishi. Qator yaqinlashishining zaruriy sharti.Yaqinlashuvchi qatorlarning xossalari. Musbat hadli qatorlar va ularning yaqinlashish alomatlari.
2. Ixtiyoriy hadli qatorlar va ular yaqinlashishining Leybnits, Dirixle va Abel alomatlari.
3. Absolyut yaqinlashuvchi qatorlar va ularning xossalari.Tatbiqlari.

1. 1-ta'rif. $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ sonlar ketma-ketligidan tuzilgan

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n \qquad (22.1.1)$$

cheksiz yig'indiga sonli qator deyiladi.

$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ larga qatorning hadlari, u_n ga esa, n **-**hadi yoki umumiy hadi deyiladi.

Qatorlarga bir necha misollar keltiramiz:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$$

qatorga garmonik qator deyiladi;

$$2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^n}+...$$

qator birinchi hadi $a_1=\frac{1}{2}$, maxraji $q=\frac{1}{2}$ bo'lgan geometrik progressiyani ifodalaydi;

$$3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}+...$$

2. Qator yig'indisi, qator yaqinlashuvi

Sonli qator ta'rifidan ma'lumki, uning hadlari cheksiz ko'p bo'lib, qator yig'indisini oddiy yo'l bilan qo'shib, topib bo'lmaydi. Shuning uchun qatorning yig'indisi tushunchasini kiritamiz. (22.1.1) qator hadlaridan qusmiy yig'indilar deb ataluvchi ushbu

$$u_1=S_1,\ \ u_1+u_2=S_2,\ \ u_1+u_2+u_3=S_3,...,$$
$$u_1+u_2+u_3+....+u_n=S_n$$

yig'indilarni tuzamiz.

2-ta'rif: $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$ chekli limit mavjud bo'lsa, S ga qator yig'indisi deyiladi va qator yaqinlashuvchi deb ataladi.

Chekli limit mavjud bo'lmasa, qatorning yig'indsi bo'lmaydi va qator uzoqlashuvchi deyiladi.

1-misol. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}+...$

qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish: Berilgan qatorning n qismiy yig'indisini qaraymiz:

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+.....+\frac{1}{n(n+1)}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+....+$$
$$+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$$

bo'lib, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$.

Shunday qilib, berilgan sonli qator yaqinlashuvchi va uning yig'indisi $S=1$ bo'ladi.

2-misol. Eng sodda, biroq juda ko'p uchraydigan qatorlardan biri geometrik progressiyadir:

$$u+uq+uq^2+...+uq^{n-1}+... \qquad (22.1.2)$$

a progressiyaning birinchi hadi, q ko'paytuvchi eso progressiyaning maxraji deb aytiladi.

Progressiyaning birinchi n ta hadining yig'indisi $q\neq 1$ bo'lganda

$$S_n = \frac{u-uq^n}{1-q}$$

formula bo'yicha hisoblanadi.

1) Agar $|q|<1$ bo'lsa, u holda $n\to\infty$ da $q^n\to 0$ va

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{u-uq^n}{1-q} = \lim_{n\to\infty}\frac{u}{1-q} - \lim_{n\to\infty}\frac{uq^n}{1-q} = \frac{u}{1-q}.$$

Shundaq qilib, $|q|<1$ bo'lganda geometrik progressiya yaqinlashuvchi qator va uning yig'indisi $S=\frac{u}{1-q}$ bo'ladi.

2) Agar $|q|>1$ bo'lsa, u holda $n\to\infty$ da $q^n\to\infty$ va

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{u-uq^n}{1-q} = \infty.$$

Demak, bu holda qator uzoqlashadi.

3) Agar $q=1$ bo'lsa, u holda (21.1.) qator

$$u+u+u+...+u+...$$

ko'rinishni oladi. Uning uchun $S_n = nu$ va $a\neq 0$ bo'lganda $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, ya'ni qator uzoq;ashadi.

4) Agar $q=-1$ bo'lsa, u holda (*) qator

$$u-u+u-u+...$$

ko'roinishni oladi. Bu holda n juft son bo'lganda $S_n=0$ va n toq bo'lganda $S_n=a$ bo'ladi. Demak $a\neq 0$ bo'lganda $\lim_{n\to\infty} S_n$ mavjud emas va qator uzoqlashadi.

Shunday qilib, *geometrik progressiya* $|q|<1$ *da yaqimlashuvchi,* $q\geq 1$ *bo'lganda esa uzoqlashuvchi qatordir.*

3. Yaqinlashuvchi qatorlarning xossalari

a) $u_1+u_2+...+u_n+...$ (22.3.1)

qator yaqinlashuvchi va uning yig'indisi S bo'lsa, istalgan $c\neq 0$ son uchun,

$$cu_1+cu_2+...+cu_n+... \qquad (22.3.2)$$

qator ham yaqinlashuvchi va uning yig'indisi cS bo'ladi;

Isbot: S_n va σ_n lar (21.3.1) va (21.3.2) qatorlarning mos ravishda xususiy yig'indilari bo'lsin. Bu holda $\sigma_n=cu_1+cu_2+...+cu_n+....$

Bundan $\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}cS_n=c\lim_{n\to\infty}S_n=cS$.

b) $a_1+a_2+...+a_n+...$ (*) va $b_1+b_2+...+b_n+...$

qatorlar yaqinlashuvchi va mos ravishda S',S'' yig'indalarga ega bo'lsa,

$$(a_1\pm b_1)+(a_2\pm b_2)+...+(a_n\pm b_n)+... \qquad (22.3.3)$$

qator ham yaqinlashuvchi va yig'indisi $(S'\pm S'')$ dan iborat bo'ladi;

Isbot: Faraz qilaylik (22.3.1), (22.3.2) va (22.3.3) qatorlarning yig'indisi mos ravishda S', S'' va S bo'lsin. U holda

$$S=(a_1\pm b_1)+(a_2\pm b_2)+...+(a_n\pm b_n)=(a_1+a_2+...+a_n)+$$
$$(b_1+b_2+...+b_n)=S'\pm S''.\ \lim_{n\to\infty}S=\lim_{n\to\infty}(S'\pm S'')=S'\pm S''.$$

c) $u_1+u_2+u_3+...+u_k+u_{k+1}+...+u_n+...$ (22.3.1)

qator yaqinlashuvchi bo'lsa,

$$u_k+u_{k+1}+...+u_n+... \qquad (22.3.2)$$

qator ham yaqinlashuvchi va aksincha (22.3.2) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, (22.3.1) qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi. Qator yaqinlashuvchi bo'lsa, undan chekli sondagi dastlabki hadlarni tashlab yuborish yaqinlashishga ta'sir qilmaydi.

Eslatma: Agar (22.1.1) qator yaqinlashuvchi va uning yig'indisi S ga teng bo'lsa, u holda qatorning istalgan hadlarining o'rnini almashtirmasdan guruhlash mumkin bo'ladi, masalan

$$u_1 + (u_2 + u_3) + (u_4 + u_5) + (u_6 + u_7 + u_8) + \dots$$

Hosil bo'lgan yangi qator ham yaqinlashuvchi va uning yig'indisi S ga teng bo'ladi.

4. Qator yaqinlashishining zaruriy belgisi(sharti)

Teorema. $$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \qquad (22.4.1)$$

qator yaqinlashuvchi bo'lsa, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ shart bajariladi.

Isbot. u_n qator yaqinlashuvchi bo'lganligi uchun $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} u_n$ va $S_{n-1} = \sum\limits_{i=1}^{n-1} u_n$ xususiy yig'indilarni qaraymiz. Bulardan

$u_n = S_n - S_{n-1}$ va $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$. Chunki $n \to \infty$ da $n-1 \to \infty$ va $S_n \to S,\ S_{n-1} \to S.$

Shunday qilib, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ kelib chiqdi.

Natija. Qator umumiy hadining $n \to \infty$ dagi limiti 0 ga teng bo'lmasa, u uzoqlashuvchi bo'ladi. Lekin $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ shartdan qatorning yaqnlashuvchiligi kelib chiqmaydi. Bu shart faqat zaruriy shart bo'lib, yetarli emas.

Masalan, garnonik qator uchun $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ bo'ladi, ammo keyinchalik uni uzoqlashuvchi qator ekanini ko'rsatamiz.

5. Musbat hadli qatorlar yaqinlashishining yetarli belgilari

Ta'rif. Hadlari manfiy bo'lmagan qatorlarga musbat hadli qatorlar deyiladi.

Ushbu musbat hadli qator berilgan bo'lsin:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots . \qquad (22.5.1)$$

Bu yerda $u_n \geq 0 \ (n = 1, 2, \dots)$. U holda $S_{n+1} = S_n + u_{n+1} \geq S_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ ekanligi ravshandir, ya'ni $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ ketma-ketlik kamaymaydigan. Quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz:

1-teorema. (1) musbat hadli qatorning yaqinlashuvchi bo'lishi uchun bu qatorning xususiy yig'indilaridan tuzilgan ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan bo'lishi zarur va etarlidir. Musbat hadli qatorlarni taqqoslash haqidagi teoremalarni keltiramiz,

2-teorema. Quyidagi ikkita musbat hadli qatorlar berilgan bo'lsin:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{22.5.2}$$

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots . \tag{22.5.3}$$

(22.5.2) qatorning hadlari (22.5.3) qatorning mos hadlaridan katta bo'lmasa, ya'ni

$$a_n \le b_n \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{22.5.4}$$

hamda (22.5.3) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda (22.5.2) qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

Isbot: (22.5.2) va (22.5.3) qatorlarning xususiy yig'indilarini mos ravishda A_n va B_n deb belgilaymiz. (22.5.4) dan $A_n \le B_n$ tengsizlikni yozish mumkin. Agar (22.5.3) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda 1-teoremaga asosan (22.5.2) qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi. Chunki shart bo'yicha $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = B$. Demak, $A_n \le B$ bo'ladi. Teorema isbot bo'ladi.

3-misol. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Yuqorida biz $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ qatorning yaqinlashuvchiligini ko'rsatgan edik. Berilgan qatorni shu qator bilan solishtiramiz $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n-1)} \quad (n = 2, 3, \ldots)$.

2-teoremaga asosan berilgan qator yaqinlashuvchidir.

3-teorema. Quyidagi ikkita musbat hadli qatorlar berilgan bo'lsin:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{22.5.2}$$

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots \tag{22.5.3}$$

(22.5.2) qatorning hadlari (22.5.3) qatorning mos hadlaridan kichik bo'lmasa, ya'ni

$$a_n \ge b_n \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{22.5.5}$$

hamda (22.5.3) qator uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda (22.5.2) qator ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

Isbot: Yana (22.5.2) va (22.5.3) qatorlarning xususiy yig'indilarini mos ravishda A_n va B_n deb belgilaymiz. (22.5.5) tengsizlikdan $A_n \geq B_n$ bo'lishi kelib chiqadi. (22.5.3) qator uzoqlashuvchi hamda uning xususiy yig'indilari o'suvchi bo'lgani uchun $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = \infty$ bo'ladi. Natijada $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \infty$ bo'ladi. Demak, (22.5.2) qator ham uzoqlashuvchi bo'ladi. Teorema isbot bo'ldi.

Eslatma: Qatorlarni taqqoslash teoremalaridan foydalanishda qatorlarni taqqoslash uchun yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchiligi ma'lum bo'lgan qatorlarni olish kerak bo'ladi.

4-misol. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$ qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish: $a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$ berilgan qatorning umumiy hadi. Uni $b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2}}$ bilan solishtiramiz

$$\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n}.$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ garmonik qator bo'lib, u uzoqlashuvchidir

2). **Dalamber belgisi.** Musbat hadli

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots$$

qator berilgan bo'lsin.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = d$$

limit mavjud bo'lib:

$d < 1$ bo'lsa, qator yaqinlashuvchi;

$d > 1$ bo'lsa, qator uzoqlashuvchi;

$d = 1$ bo'lsa, qator yaqinlashuvchi ham uzoqlashuvchi ham bo'lishi mumkin, bunday hollarda qatorni boshqa belgilardan foydalanib tekshirish kerak bo'ladi. Bu belgini isbotsiz qabul qilamiz. Isbotini mustaqil o'rganishga tavsiya qilamiz.

5-misol. $1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}+...$

qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish: $u_n=\frac{1}{n!},\ n_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$ va $d=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1/(n+1)!}{1/n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1.$

Demak, berilgan qator Dalamber belgisiga asosan yaqinlashuvchi.

6-**misol**. $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+...+\frac{n}{2n-1}+...$

qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish: $d=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n+1}{2n+1}/\frac{n}{2n-1})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n-1)}{(2n+1)n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+n-1}{2n^2+n}=\frac{2}{2}=1$.

Bu holda Dalamber belgisi savolga javob bermaydi. Berilgan qator uchun qator yaqinlashishining zaruriy belgisini tekshiraylik.

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2}\neq 0.$$

Qator yaqinlashishining zaruriy sharti bajarilmaydi, demak berilgan qator uzoqlashuvchi.

3) Koshi belgisi

$a_1+a_2+...+a_n+...$

musbat hadli qator berilgan bo'lib, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=k$ limit mavjud va

$k<1$ bo'lsa, qator yaqinlashuvchi;

$k>1$ bo'lsa, qator uzoqlashuvchi;

$k=1$ bo'lsa, qator yaqinlashuvchi ham, uzoqlashuvchi ham bo'lishi mumkin, bu holda Koshi belgisi savolga javob bermaydi.

Bu belgini isbotsiz qabul qilamiz. Isbotini mustaqil o'rganishga tavsiya qilamiz.

7-**misol**. $\sum_1^\infty\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n=\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+...+\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n+...$

qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish: Koshi belgisiga asosan,

$$k=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1.$$

Shunday qilib, berilgan qator Koshi belgisiga asosan yaqinlashuvchi.

4) Qator yaqinlashishining integral belgisi

Quyidagi musbat hadli qator berilgan bo'lsin:

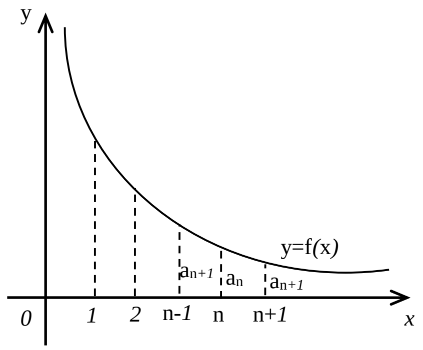
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots (1)$$

Teorema:(1) qatorning hadlari monoton kamayuvchi bo'lib, ya'ni $a_n \geq a_{n+1}$ va

$$\int_1^{\infty} f(x)dx \, (2)$$

xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lsa, (1) qator ham yaqinlashuvchi, (2) integral uzoqlashuvchi bo'lsa, (1) qator ham uzoqlashuvchi bo'ladi, bu yerda $x \geq 1$ bo'lganda $f(x)$ uzluksiz va musbat.

Isbot: Yu qoridan $y = f(x)$ funksiyaning grafigi va asosi Ox o'qidagi $x=1$ dan $x=n$ gacha bo'lgan kesma bilan chegaralangan egri chiziqli trapesiyani qaraymiz (1-rasm)



1-rasm.

Asosi $[1;2],[2;3],\ldots$ kesmalardan iborat bo'lgan tashqi va ichki to'g'ri to'rtburchaklarni chizamiz. Aniq integralning geometrik ma'nosini e'tiborga olib, quyidagi tengsizlikni yozamiz:

$$f(2)\cdot 1 + f(3)\cdot 1 + \ldots + f(n)\cdot 1 < \int_1^n f(x)dx < f(1)\cdot 1 + f(2)\cdot 1 + \ldots + f(n-1)\cdot 1 \quad \text{yoki}$$

$$a_2 + a_3 + \ldots + a_n < \int_1^n f(x)dx < a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$$

yoki

$$S_n - a_1 < \int_1^n f(x)dx < S_n - a_n. \qquad (3)$$

1-hol. $\int_1^{\infty} f(x)dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lsin, ya'ni $\int_1^{\infty} f(x)dx = A.$

$\int_1^n f(x)dx < \int_1^{+\infty} f(x)dx = A$ bo'lgani uchun, hamda (3) tengsizlikni e'tiborga olib, $S_n - a_1 < A$, ya'ni $S_n < a_n + A$ tengsizltkni yozish mumkin. Bundan xususiy yig'indilar ketma-ketligi monoton o'suvchi va yuqoridan chegaralangan bo'lgani uchun, limitning mavjudligi haqidagi teoremaga asosan limiti mavjud bo'ladi.

Demak, (1) qator yaqinlashuvchi.

2-hol. $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integral uzoqlashuvchi bo'lsin. Bu holda $\int_1^{+\infty} f(x)dx = +\infty$ bo'ladi va $n \to +\infty$ da $\int_1^n f(x)dx$ chegaralanmagan o'suvchi bo'ladi. $S_n > \int_1^n f(x)dx + a_n$ e'tiborga olgan holda $n \to +\infty$ da $S_n \to +\infty$ kelib chiqadi. Demak, (1) qator uzoqlashuvchi.

<u>Eslatma:</u> $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ integralning o'rniga $\int_k^{+\infty} f(x)dx$ integralni olish mumkin, bu yerda $k \in N$, $k > 1$. (1) qatorning k ta birinchi hadlarini tashlab yuborish uning yaqinlashishi yoki uzoqlashishiga ta'sir etmaydi**.**

8-misol. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish: $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$.

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{\alpha \to \infty} \int_2^{\alpha} \frac{d(\ln x)}{(\ln x)^2} = -\lim_{\alpha \to \infty} \left(\frac{1}{\ln x} \right) \Bigg|_2^{\alpha} = -\lim_{\alpha \to \infty} \left(\frac{1}{\ln \alpha} - \frac{1}{\ln 2} \right) = \frac{1}{\ln 2}.$$

Xosmas integral yaqinlashuvchi, demak, berilgan qator ham yaqinlashuvchidir.

9-misol. $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} + ...$ qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish: $f(n)=\frac{1}{n^2}$ ¸êè $f(x)=\frac{1}{x^2}$ funksiyani tuzib, ushbu xosmas integralni hisoblaymiz:

$$\int_1^{\infty} f(x)dx=\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-2}dx=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)^b\Bigg|_1=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+\frac{1}{1}\right)=1.$$

Demak, xosmas integral yaqinlashuvchi, integral belgiga asosan, tekshirilayotgan qator ham yaqinlashuvchidir.

10-misol. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{n}+...$

garmonik qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish: $f(n)=\frac{1}{n}$ ¸êè $f(x)=\frac{1}{x}$ bo’lganligi uchun

$$\int_1^{\infty} f(x)dx=\int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to\infty}(\ln b-\ln 1)=\lim_{b\to\infty}\ln b=\infty\,.$$

Demak, xosmas integral uzoqlashuvchi, integral belgiga asosan, garmonik qator ham uzoqlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

6. Ishoralari almashinuvchi qatorlar (Leybnis qatori)

Ishoralari har xil bo’lgan qatorlarga o’zgaruvchan ishorali qatorlar deyiladi. O’zgaruvchan ishorali qatorlarning xususiy holi, ishoralari navbat bilan almashinuvchi qatorlardir.

Ushbu $u_1-u_2+u_3-u_4+...+(-1)^{n-1}u_n+...,$ bunda $u_n\geq 0$ qator ishorasi navbatlanuvshi qator deyiladi.

Izoh: Qator birinchi hadi ishorasi “-” (manfiy) bo’lsa, qatorni (-1) ga ko’paytirib olanadi.

Masalan, $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+...$

qator, ishoralari navbat bilan almashinuvchi qatordir.

Ishoralari navbat bilan almashinuvchi qatorlar yaqinlashishini **Leybnis belgisi** bilan tekshiriladi.

Ishoralari navbat bilan almashinuvchi

$$u_1-u_2+u_3+...+(-1)^{n+1}u_n+...\,(7)$$

qator berilgan bo'lsin. Bu yerda $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ musbat sonlar.

Leybnis belgisi. Ishoralari navbat bilan almashinuvchi qator hadlari absolyut qiymati bo'yicha kamayuvchi, ya'ni

1) $u_1 > u_2 > u_3 > \dots$

va

2) umumiy hadining $n \to \infty$ dagi limiti no'lga teng, ya'ni $\lim_{n\to\infty}|u_n| = 0$ bo'lsa, ishoralari navbat bilan almashinuvchi (7) qator yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi birinchi haddan katta bo'lmaydi. Bu shartlardan birortasi bajarilmasa, qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

7. O'zgaruvchan ishorali qatorlar Absolyut va shartli yaqinlashish

Agar qatorning hadlari orasida bir nechta musbat va bir nechta manfiy hadlari bo'lsa, bunday qatorlarga o'zgaruvchan ishorali qatorlar deyiladi.

O'zgaruvchan ishorali qator yaqinlashishni tekshirishda muhim bo'lgan yetarli shartini o'rganamiz.

Teorema: O'zgaruvchi ishorali qator

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots (1)$$

hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan

$$|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots (2)$$

qator yaqinlashsa, u holda (1) qator ham yaqinlashadi.

Isbot: (1) va (2) qatorning xususiy yig'indilarini mos ravishda S_n va σ_n lar bilan belgilaymiz. (1) qatorning n ta musbat hadining yig'indisini S_n', manfiylarini esa S_n'' deb belgilaymiz.

U holda $S_n = S_n' - S_n''$, $\sigma_n = S_n' + S_n''$. Lekin 2-teorema shartiga ko'ra (2) qator yaqinlashuvchi bo'lgani uchun

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \lim_{n\to\infty}(S_n' + S_n'') = \lim_{n\to\infty}S_n' + \lim_{n\to\infty}S_n'' = S' + S''.$$

Bundan

$$\lim_{n\to\infty}S_n' = S', \quad \lim_{n\to\infty}S_n'' = S''.$$

Natijada

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(S_n' - S_n''\right) = \lim_{n\to\infty} S_n' - \lim_{n\to\infty} S_n'' = S' - S''$$

bo’ladi. Bu esa (1) qatorning yaqinlashuvchiligini ko’rsatadi. Teorema isbot bo’ldi.

Bu teoremadan o’zgaruvchi ishorali qatorni yaqinlashishga tekshirish musbat hadli qatorni tekshirishga keladi.

1-ta’rif. Agar (2) qator yaqinlashuvchi bo’lsa, u holda (1) qatorni absolyut yaqinlashuvchi deyiladi.

2-ta’rif. (1) qator yaqinlashuvchi bo’lib, (2) qator uzoqlashuvchi bo’lsa, u holda (1) qator shartli yaqinlashuvchi deyiladi.

11-misol. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}$ qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish: Berilgan qatorning absolyut qiymatlarilan tuzilgan qatorni qaraylik

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots.$$

Bu qator cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya bo’lib, uning mahraji $q = \frac{1}{2} < 1$ bo’lgani uchun yaqinlashuvchidir. Ikkinchi tomondan qatorning o’zi Leybnis teoremasining shartlarini qanoatlantirgani uchun yaqinlashuvchi. Demak, berilgan qator absolyut yaqinlashuvchi bo’ladi.

12-misol. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish: Bu qator hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan qator garmonik qator bo’lgani uchun uzoqlashuvchi bo’ladi. Lekin Leybnis teoremasiga asosan bu qator yaqinlashuvchidir, ya’ni

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \ldots > \frac{1}{n} > \ldots$$

va

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

Demak, berilgan qator shartli yaqinlashuvchi ekan.

11 –misol. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots$ qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish: Leybnis belgisi shartlarini tekshiramiz:

1) $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \dots\,;$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ .Demak, Leybnis belgisining ikkala sharti ham bajariladi. Shunday qilib, berilgan qator Leybnis belgisiga asosan, yaqinlashuvchi.

12-misol. $1{,}1 - 1{,}01 + 1{,}001 + \dots$

qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish: $1{,}1 > 1{,}01 > 1{,}001 > \dots$

birinchi shart bajariladi. Lekin $a_n = 1 + 0{,}1^n$ bo'lib,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{10^n}) = 1 \neq 0,$$

Leybnis belgisining ikkinchi sharti bajarilmaydi. Demak, berilgan qator uzoqlashuvchi.

13-misol. $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots$

ni 0,1 aniqlikda taљribiy hisoblang.

Yechish: Shartga asosan $|r_n| < 0{,}1$ bo'lishi kerak.

$$|r_n| < a_{n+1} = \frac{1}{n+1}, \quad \frac{1}{n+1} = \frac{1}{10}, \quad n+1 = 10, \quad n = 9. \quad Äåìàê\ ,$$

$$S_9 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} \approx 0{,}74.$$

Bunda $S \approx 0{,}74\,;$ $0{,}1$ gacha aniqlikda hisoblandi.

Endi o'zgaruvchan ishorali qatorlarning ayrim xossalarini qaraymiz.

14-misol. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots$ qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish: Berilgan qator hadlarining absolyut qiymatidan qator tuzamiz:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$$

bu qator maxraji $q = \frac{1}{3}$ bo'lgan geometrik progressiya bo'lib, yaqinlashuvchidir. Demak, berilgan qator absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi.

15-misol. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots$

qator shartli yaqinlashuvchidir. Chunki, uning hadlarining absolyut qiymatidan tuzilgan

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

garmonik qator uzoqlashuvchi (8-misolga qarang), berilgan qatorning o'zi esa yaqinlashuvchi.

Mustaqil yechish uchun misollar

1-misol. Umumiy xadi $a_n=\dfrac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$ bo'lgan kator yigindisini toping.

2 – misol. Koshi kriteriyasidan foydalanib,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

garmonik katorning uzoqlashuvchi ekanini ko‘rsating.

3-misol. $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{6}{7}+\ldots$ kator uchun yaqinlashishning zaruriy sharti bajariladimi?

4-misol. Quyidagi qatorlarning yaqinlashishi yoki uzoqlashishini tekshiring:

$$\text{a)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^{n-1}}\ ;\qquad \text{b)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$$

5- misol. Dalamber alomatidan foydalanib, ushbu qatorning yaqinlashishini tekshiring:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{3^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}+\ldots$$

6-misol. $\dfrac{3}{2^{-1}}+\dfrac{3^3}{2^2}+\dfrac{3^5}{2^5}+\ldots+\dfrac{3^{2n-1}}{2^{3n-1}}+\ldots$

Qatorni Koshi alomati bilan tekshiring.

XULOSA

Respublikamizda amalga oshirilayotgan bunyodkorlik ishlari vohamizning turmush darajasini yetakchi demokratik davlatlar ko’rsatkichiga chiqarish bosh maqsadlardan biri qilib belgilangan. Har bir davlat borki uning rivoji bevosita ta’lim tizimi bilan bog’liq. Oliy ta’lim tizimida gumanitar va tabiiy fanlarni o’qitishda talabalarni kasbga yo’naltirish imkoniyatlari chegaralanganligi sababli auditoriyadan tashqari mustaqil ta’limda amalga oshirish mumkin. Ayniqsa Oliy matematika fani bo’yicha mustaqil ta’limda talabalarning bajaradigan loyihali faoliyatidan kelib chiqib kasblarga yo’naltirish imkoniyatlari kattadir. O’quv qo’llanmani yaratish davomida quyidagi xulosalarga keldim:

1. Har bir ta’lim yo’nalishi bo’yicha olib boriladigan kasbga yo’naltirish ishlarini uzviyligini ta’minlash maqsadida qo’shimcha resuruslarni yanada takommillashtirish yaxshi natija beradi.
2. Oliy matematika fani mashg’ulotlarida bajariladigan ishlarni, talaba auditoriyadan tashqari vaqtda o’zi takror mustaqil bajarib matematik bilim ko’nikmasini oshiradi.
3. O’quv qo’llanmadagi metodlar va prinsiplarga asoslanib, modulni mutaxassisning bo’lajak kasbiy faoliyatiga bog’lab tushintirish ta’lim samaradorligini oshiradi.
4. Talabalardagi kasbiy manbaalarga oid ma’lumotlarni yig’ish va ularni qayta ishlash, auditoriyadan tashqaridagi mustaqil ishlar bilan fan predmetlarini bog’lash talabalarda kasbiy dunyoqarashni kengaytiradi.

Mazkur o’quv qo’llanmada oliy matematika fani doirasida ko‘plab amaliy masalalar keltirilganki, ushbu amaliy masalalarni chuqur o‘rganish har bir talabada bilim, ko‘nikma va malakani shakillantirishga yaqindan yordam beradi.

OLIY MATEMATIKA KURSIDAN SINFDAN TASHQARI MASHG‘ULOTLARIDA KASBIY FAOLIYATIGA YO‘NALTIRUVCHI MASALALAR

1-masala: R radiusli yupqa metall doiradan eng katta sig’imli voronka yasashga mo‘ljallangan sektor qirqib olish talab qilinadi. Metallning deformatsiyalanishi va ishlov berishga qoldirilgan qiyqimlar hisoblashlarda nazarga olinmasin.

Yechish: Sektorning markaziy burchagini x (radian) bilan belgilaymiz; sektorning radiusi R konusning yasovchisi bo‘lib qoladi. Konus asosining radiusi r ni konus asosi aylanasining uzunligi sektor yoyining uzunligiga tengligi shartidan

$2\pi r = Rx$, $r = \dfrac{Rx}{2\pi}$ ni aniqlaymiz:

Konusning balandligi $H = \sqrt{R^2 - \dfrac{R^2x^2}{4\pi^2}}$

Masalaning mazmuni bo‘yicha $0 < x < 2\pi$ ekanligi kelib chiqadi.

U holda konusning hajmi

$$V = f(x) = \frac{1}{3}\pi r^2 H = \frac{1}{3}\pi\frac{R^2x^2}{4\pi^2}\sqrt{\frac{(4\pi^2 - x^2)R^2}{4\pi^2}} = \frac{R^3}{24\pi^2}x^2\sqrt{4\pi^2 - x^2} = kx^2\sqrt{4\pi^2 - x^2}.$$

Bu yerda $k = \dfrac{R^3}{24\pi^2}$ bo‘lib, masala sharti bo‘yicha x ning qanday qiymatida funksiya eng katta qiymatni qabul qilishini aniqlashdan iborat edi.

1. $f'(x)$ ni topamiz:

$$f'(x) = (kx^2\sqrt{4\pi^2 - x^2})' = (k\sqrt{4\pi^2x^4 - x^6})' =$$

$$= \frac{k(4\pi^2x^4 - x^6)'}{2\sqrt{4\pi^2x^4 - x^6}} = \frac{k(16\pi^2x^3 - 6x^5)}{2\sqrt{4\pi^2x^4 - x^6}} = \frac{kx(8\pi^2 - 3x^2)}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}}$$

2. $f'(x)$ ning o‘z ishoralarini saqlab qoladigan ildizlarini va oraliqlarini topamiz. Buning uchun intervallar usulidan foydalanamiz.

$$f'(x) = \frac{-3kx\left(x - \dfrac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \dfrac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}}$$

$$-\frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \qquad 0 \qquad \frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \qquad 2\pi$$

3. Olingan natijalarni jadval ko‘rinishda tasvirlasak quyidagicha bo‘ladi:

x	$0 < x < \frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$	$x = \frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$	$\frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}} < x < 2\pi$
$f'(x)$	+	0	–

$x < \frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ bo‘lganda $f'(x) > 0$, $x > \frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ bo‘lganda $f'(x) < 0$. $x = \frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ bo‘lganda $f'(x) = 0$ bo‘lganligidan $x = \frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ bo‘lganda f funksiya maksimal qiymatga ega bo‘ladi. Shunday qilib, eng katta siimli konus voronka uchun sektorning markaziy burchagi bo‘lishi kerak ekan.

2-masalan. Surish bo‘ylama kuchi quyidagi empirik formula yordamida aniqlanadi: $P = C_P t^{xp} \cdot S^{yp} \cdot v^{zp} k$. Bu yerda C_P – kesish koeffitsienti bo‘lib, u $\frac{H}{мм^2}$ formula yordamida hisoblab topiladi. t – kesish chuqurligi (mm); S –surish (mm); v –kesish tezligi $\frac{m}{\min}$; k – konkret material uchun tuzatish koeffitsenti deb yuritiladi. Bunday formulalar yordamida hisoblashlarni bajarishda o‘quvchilardan logarifmning xossalari va uning jadvallaridan foydalana olish bo‘yicha bilim va malakalariga ega bo‘lish talab etiladi.

Masala. Agar stanok shpindelining aylanish chastotasi $n \approx 16c^{-1}$, kesish chuqurligi $t \approx 2.5$mm, surilish $S \approx 0.6$ mm bo‘lsa, $d \approx 84$ mm bo‘lgan detallni yo‘nishda kesish kuchi P_z ni aniqlang. Keskich plastinkali $T1^5K^6$ qattiq qotishma

($\gamma \approx 12^o$; $\varphi \approx 60^o$; $r \approx 1.0$ mm), detallning materiali uglerodli po‘latdan iborat $\left(v_\beta \approx 883 \frac{H}{mm^2} \right)$.

Yechish. Kesish kuchini $P_z = C_P t S^{0.75} v^{-0.15} k$ formula orqali aniqlaymiz. k va C_P qiymatlarni jadvaldan olamiz. $k \approx 1.09$; $C_P \approx 2626 \frac{H}{mm^2}$ ni oldindan aniqlab olamiz: $v=\frac{\pi dn}{1000}\left(4.22\frac{m}{c}\approx 253{,}2\frac{m}{\min}\right)$. Kesish kuchi formulalarini logarifmlab, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\lg P_z=\lg C_P+\lg t+0.75\lg S-0.15\lg v+\lg k$$

$$\lg 2626\approx 3.4193\wedge \lg 2.5\approx 0.3979\wedge 0.75\lg 0.6\approx -0.1664\wedge$$

$$-0.15\lg 253.2\approx -0.3605\wedge \underline{\lg 1.09\approx 0.03374}\Rightarrow \lg P_z\approx 3.3277\vee\ P_z\approx 2126H$$

<u>3-masala</u>. Agar kesish kuchi $P_z\approx 2450H$, detalning diametri $d\approx 56$mm, $r\approx 0.78$ bo‘lsa, $v\approx 2.27\frac{м}{c}$ tezlik bilan detalga ishlov berish uchun stanok dvigatelining 7,8 *kvt* quvvati yetarli bo‘ladimi?

Yechish. Hisoblash formulasi: $N_{кec}=\frac{P_z v}{1000}$ ga qiymatlarni qo‘yib quyidagiga ega bo‘lamiz: $N_{кec}\approx\frac{2450H\cdot 2.27\frac{м}{c}}{1000}\approx 5{,}6kVt\quad\wedge\quad N_{эф}=N_{дв},\quad N_{эф}\approx 7{,}8\cdot 0{,}78\approx 6kVt$. Oxirgidan ko‘rinadiki, $N_{кec}<N_{эф}$ bo‘ladi. Shuning uchun, elektrodvigatel quvvati yetarli.

<u>4-masala.</u> Zargarga massalari 1 g, 2 g, ..., *n* g bo‘lgan yuklardan istalgan birini pallali tarozida oddiy usulda tortish uchun massalari turli xil bo‘lgan m ta tosh zarur. m ning eng kichik qiymatini toping?

Yechish. Toshlarning massalari a_1 г, a_2 г, ..., a_m г bo‘lib, $a_1<a_2<...<a_m$ bo‘lsin. Unda

$$a_1=1,$$

$$a_2\le a_1+1=2,$$

$$a_3\le a_2+a_1+1\le 2+1+1=2^2,$$

$$a_4\le a_3+a_2+a_1+1\le 2^2+2+1+1=2^3,$$

. . . .

$$a_m\le a_{m-1}+a_{m-1}+...+a_2+a_1+1=2^{m-1}.$$

Barcha toshlar massalarining yig‘indisi n dan kam bo‘lmasligi uchun

$$n \leq a_1 + a_2 + ... + a_m \leq 1 + 2 + ... + 2^{m-1} = 2^m - 1,$$

ya’ni m soni $n \leq 2^m - 1$ tengsizlikni qanoatlantirishi kerak. Bu tengsizlikni qanoatlantiruvchi m sonlarning eng kichigini $N(n)$ bilan belgilasak,

$$2^{N(n)-1} \leq n \leq 2^{N(n)} - 1, \text{ ёки } 2^{N(n)-1} \leq n < 2^{N(n)}$$

bo‘ladi. Demak, toshlar soni $N(n)$ dan kam emas ekan.

Murakkab holida. Zargarga massalari 1 g, 2 g, ..., n g bo‘lgan yuklardan istalgan birini pallali tarozida oddiy usulda tortish uchun massalari turli xil bo‘lgan m ta tosh zarur. m ning eng kichik qiymatini topamiz.

Toshlarning massalari $a_1\,г,\ a_2\,г,\ ...,\ a_m\,г$ bo‘lib, $a_1 < a_2 < ... < a_m$ bo‘lsin. Unda

$$a_1 = 1,$$

$$a_2 \leq a_1 + 1 = 2,$$

$$a_3 \leq a_2 + a_1 + 1 \leq 2 + 1 + 1 = 2^2,$$

$$a_4 \leq a_3 + a_2 + a_1 + 1 \leq 2^2 + 2 + 1 + 1 = 2^3,$$

. . . .

$$a_m \leq a_{m-1} + a_{m-1} + ... + a_2 + a_1 + 1 = 2^{m-1}.$$

Barcha toshlar massalarining yig‘indisi n dan kam bo‘lmasligi uchun

$n \leq a_1 + a_2 + ... + a_m \leq 1 + 2 + ... + 2^{m-1} = 2^m - 1,$

ya’ni m soni $n \leq 2^m - 1$ tengsizlikni qanoatlantirishi kerak. Bu tengsizlikni qanoatlantiruvchi m sonlarning eng kichigini $N(n)$ bilan belgilasak,

$2^{N(n)-1} \leq n \leq 2^{N(n)} - 1, \text{ ёки } 2^{N(n)-1} \leq n < 2^{N(n)}$

bo‘ladi. Demak, toshlar soni $N(n)$ dan kam emas ekan.

Shunday qilib, massalari $a_1 = 1г,\ a_2 = 2г,\ ...,\ a_{N(n)} = 2^{N(n)-1}\,г$ bo‘lgan $N(n)$ ta tosh yordamida massasi n grammdan oshmagan istalgan yukning massasini o‘lchash mumkinligi 2-mashqdan kelib chiqadi.

<u>5-masala.</u> Ahmad aka dala hovlisining bir chekkasiga qo‘shni uyi devoridan foydalanib, to‘ri to‘rtburchak shaklidagi qo‘yxona qurmoqchi bo‘libdi va uning atrofini o‘rashga shahardan uzunligi 36 metrli sim to‘r olib kelibdi. Qurish vaqtida to‘rni qanday o‘rash kerakligini oila a’zolari bilan maslahat qilibdi. Asosiysi – ajratiladigan maydon sathi eng katta bo‘lishi lozim, dalada uning chiroyli bo‘lishi shart emas, - debdi Ahmad aka. Qanday o‘raganda eng katta sathli maydonni o‘rab olish mumkin.

Yechish: Aytaylik, o‘rab olinadigan maydon to‘ri to‘rtburchak bo‘lib, eni x metr desak, u holda, bo‘yi $36-2x$ dir, chunki to‘rning uzunligi 36 metr edi. Bu qidirilayotgan S yuzaning quyidagi matematik ifodasini beradi:

$$S = x(36-2x)\ m^2$$

Endi bu funksiyaning eng katta qiymatini topish muammoni hal qiladi. Buni ikkita usulda bajarish mumkin.

<u>1-usul</u>. Birinchisi elementar usulda, ya’ni $S=-2x^2+36x$ funksiyaning eng katta qiymatini uning qiymatlar sohasidan aniqlash orqali topish mumkin. Bu funksiyaning grafigi shoxlari quyiga (pastga) qaragan parabola bo‘lganligi uchun uning qiymatlar sohasi $(-\infty; y_0]$ bo‘ladi. Bu yerda y_0 parabola uchining ordinatasi bo‘lib, $y_0 = \frac{-D}{4a} = -\frac{36^2 - 4\cdot(-2)\cdot 0}{4\cdot(-2)} = \frac{1296}{8} = 162$ ga teng. Demak, eng katta 162 m^2 yuzaga m^2 bo‘lganda erishish mumkin ekan. Ya’ni, qidirilayotgan to‘rtburchakning eni 9 m, uzunligi 18 m bo‘lsa, sathi eng katta qo‘yxona qurish mumkin ekan.

2-usul. $S=-2x^2+36x$ funksiyaning eng katta qiymatini bu funksiyaning hosilasi yordamida topish mumkin.

$S' = (-2x^2+36x)' = 36-4x$ bundan, S' ni nolga tenglasak, $x=9$ yechimni olish mumkin. Ya’ni qidirilayotgan to‘rtburchakning eni 9 m, uzunligi 18 m bo‘lsa, sathi eng katta qo‘yxona qurish mumkin.

<u>6-masala</u>. Hajmi V bo‘lgan asosi kvadratdan iborat to‘g’ri parallelepiped shaklidagi basseyn kavlash kerak. Basseyn tubi va devorlarini qoplash uchun eng kam miqdordagi material (masalan, kafel) sarf bo‘lishi uchun uning o‘lchamlari qanday bo‘lishi kerak?

Yechish: H - basseyn chuqurligi, a - kvadrat asosining tomoni bo‘lsin. O‘rganilayotgan yuzaning o‘lchami $S = 4aH + a^2$, bu yerda $4aH$ - basseyn devorining yuzasi, a^2 - asosining yuzasi.

Ikki (a va H) noma’lumlarning sonini kamaytirish uchun berilgan hajmdan foydalansak, ya’ni $V = a^2 H$ dan $H = \dfrac{V}{a^2}$

Demak yuza ifodasi $S = 4a\dfrac{V}{a^2} + a^2 = 4\dfrac{V}{a} + a^2$. U holda eng kichik yuzani hosila yordamida topish mumkin.

$$S' = \left(4\frac{V}{a} + a^2\right)' = -4\frac{V}{a^2} + 2a = 0 \text{ bundan esa } a = \sqrt[3]{2V}.$$

Demak eng kam material sarf bo‘lishi uchun basseyn o‘lchamlari $a = \sqrt[3]{2V}$ va

$$H = \frac{V}{a^2} = \frac{V}{\sqrt[3]{(2V)^2}} = \sqrt[3]{\frac{V}{4}} \text{ bo‘lishi kerak}$$

<u>**7-masala.**</u> 20 ming dona g’ishtdan shunday imorat solinsinki, bu imoratning foydali ichki sathi eng katta qiymatga ega bo‘lsin. Bor g’ishtning hajmi $V = 36m^3$, ya’ni bitta g’ishtning hajmi $V_1 = 0,225 \cdot 0,125 \cdot 0,65 = 0,0018m^3$ga teng. Bizda 20 mingta g’isht bor, ya’ni $V = 20000 \cdot V_1 = 20000 \cdot 0,0018 = 36m^3$. Binoning balandligi $H = 3,0$ m, devorning qalinligi $B = 0,4$ m bo‘lsin.

To‘rtburchakli g’ishtdan foydalanib imoratning eng katta sathga ega bo‘ladigan bo‘yi va eni aniqlansin.

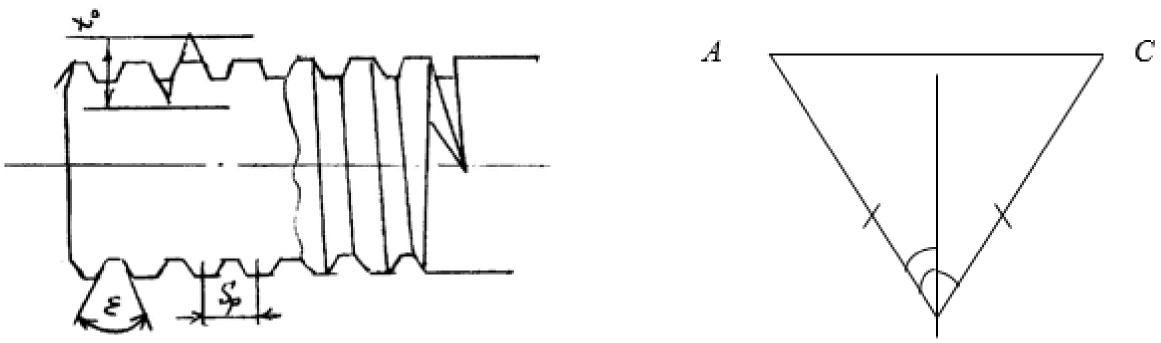
Yechish: masalani umumiyroq shartda yechamiz. Ya’ni, uyimiz to‘g’ri to‘rtburchak shaklida bo‘lib, bo‘yi y, eni x va balandligi *H*- bo‘lsin, bu holda imorat hajmi $V = x \cdot y \cdot H$, uning sirtqi sathi (g’isht sarfi) $2 \cdot y \cdot H + 2 \cdot x \cdot H$. U holda bizdan talab qilinayotgan shart uning ichki sathi yuzi $S = x \cdot y$ eng katta bo‘lsin.

Hamma g’ishtning hajmi $V = \left(2 \cdot (x + 2 \cdot B) \cdot B + 2 \cdot y \cdot B\right) \cdot H$

$V = 36$, $H = 3$ va $B = 0,4$ larni inobatga olsak, $x + y = 14,2$ kelib chiqadi.

Ma’lumki, yigindisi o‘zgarmas bo‘lgan sonlar ko‘paytmasi eng katta qiymatga erishishi uchun ular teng bo‘lishi kerak. Ya’ni, devor qalinligi 40 sm va balandligi 3 m bo‘lgan imoratning asosi kvadrat bo‘lib, uning tomoni 7 m 10 sm bo‘lishi shart ekan.

8-masala. Vintdagi qadami 2 mm bo‘lgan mahkamlash metrik rezpbasi profilining nazariy balandligini aniqlang.



a) b)

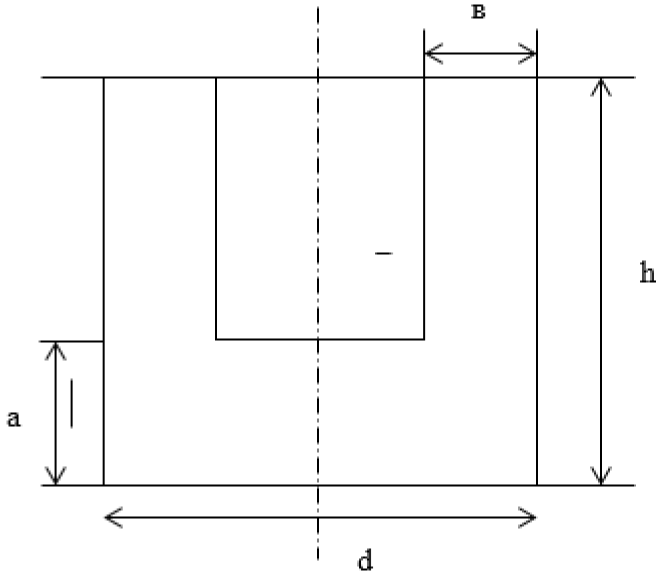
Vint (a) va rezbasining profili (b).

Yechish: Metrik rezba chiqig’ining bo‘ylama kesimini tekshiramiz va rezba qadamini S_P (2 mm, rezba chiqig’i uchidagi burchakni $\varepsilon(60^O)$, rezba profilining nazariy balandligini t_O bilan belgilaymiz. Rezba chiqiining profili teng yonli uchburchakdan iborat. Asosi va uchidagi burchagi bizga maolum. Masala shu uchburchakning balandligini topishdan iborat. rasmdan quyidagilarni hosil qilamiz:

$$AC = S_P;\ \angle ABC = \varepsilon;\ BD \perp AC;\ BD = t_O,\ \frac{BD}{DC} = ctg\frac{\varepsilon}{2},\ \frac{t_O}{\frac{S_P}{2}} = ctg\frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$

$$t_O = \frac{S_P ctg\frac{\varepsilon}{2}}{2} \approx 1.73 \text{ mm}$$

9-masala. Cho‘ktirish shtampida tasvirlangan silindrik stakan hosil qilish uchun qalinligi **a** bo‘lgan yassi yumaloq tanovarning diametrini aniqlang.



Cho‘ktirish shtampida hosil qilingan stakan.

Yechish. Hisoblash uchun tanovar hajmi V_m va tayyor detal hajmi V_d ning tengligini asos qilib olamiz:

$$V_m = \frac{\pi D^2}{4} a \; V_\partial = \frac{\pi d^2}{4} H - \frac{\pi (d-2b)^2}{4}(H-a) \quad \text{u holda,}$$

$$\frac{\pi D^2}{4} a = \frac{\pi d^2}{4} H - \frac{\pi (d-2b)^2}{4}(H-a) \;\; D = \sqrt{d^2 \frac{H}{a} - (d-2b)^2 \Rightarrow (\frac{H}{a} - 1)}$$

10-masala. Frezerlash yo‘li bilan tomonlari *a* bo‘lgan kvadrat kesimli brusok tayyorlash talab etilgan tanovarning eng kichik diametri D_m ni aniqlang. tanovar uzunligi l bo‘lganda yo‘nilgan qirindi hajmi qanchaga teng?

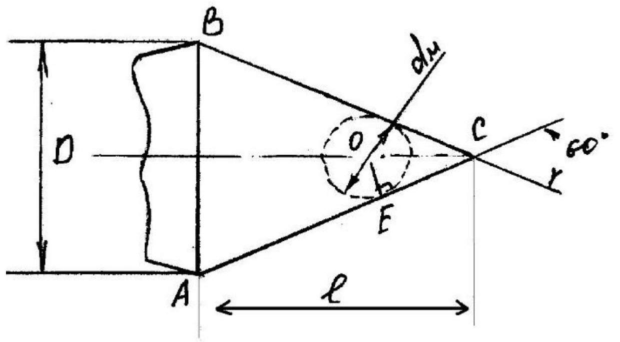
Yechish: D - asosi tomonlari *a* bo‘lgan kvadratdan iborat to‘ri to‘rtburchakli parallelepipedga tashqi chizilgan silindr asosining diametri bo‘lsin. Bunda D=$a\sqrt{2}$. Sortamentdan eng yaqin $D_m \rangle$ D ni topamiz. Olingan qirindi hajmi $V_ы$ zagotovka hajmi V_m dan brusok hajmi $V_б$ ni ayirib topiladi, ya’ni silindr va to‘ri burchakli parallelepiped hajmlarining ayirmasi sifatida topiladi:

$$V_ы = V_m - V_б = \frac{\pi D_m^2}{4} l - a^2 l = l\left(\frac{\pi D^2{}_m - a^2}{4} - a^2\right)$$

Xususiy holda agar $D_m = D$ bo‘lsa, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$V_K = l\left(\frac{\pi(a\sqrt{2})^2}{4} - a^2\right) = la^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \approx 0.57la^2$$

<u>11-masala</u>. Asosining diametri D, balandligi l va qiyalik burchagi 30^o bo‘lgan konusdan iborat markazning uchida diametri $d_ш$ bo‘lgan shar yo‘nish talab etiladi. Shar sirtini uning yasovchisi bo‘yicha konus asosidan qanday masofadan yo‘na boshlash zarurligini aniqlang.



Konusi shar bilan tugaydigan markaz.

Yechish: Markazining bo‘ylama kesimi teng yonli uchburchak bo‘lib, uning tomonlari diametri $d_ш$ bo‘lgan aylanaga urinadi. Uchburchak uchidagi burchak konus qiyalik burchagining ikkilanganiga, ya’ni 60^o ga teng. Ichki chizilgan aylananing markazi ASV uchburchakning bissektrisasida va burchak tomonlaridan $\frac{d_ш}{2}$ uzoqlikda, ya’ni $EO = \frac{d_ш}{2}$ da yotadi. AE kesmani topish kerak. SEO to‘ri burchakli uchburchakdan,

$$CE = OEctg30^O = \frac{d_ш\sqrt{3}}{2}$$

AVS teng yonli uchburchakning uchidagi burchagi 60^o ga teng bo‘lgani uchun u muntazamdir, u holda AS=D va $AE = AC - CE = D - \frac{d_ш\sqrt{3}}{2}$

<u>12-misol</u>. Asosi kvadratdan iborat, hajmi $V = 0.25$ m^3 bo‘lgan bakning eng oqil (harajatlarning eng kam miqdori maonosida) o‘lchamlarini aniqlang.

Bunda 1 m chokni payvandlash $\alpha = 10$ so‘m, $1\,м^2$ tunukaning narxi $\beta = 20$ so‘m.

Yechish. 1. Ob’ekt haqida boshlang‘ich mulohazalar. Talabalar masalaning shartlarini aniqlashga harakat qiladilar. Masalan, bakning qopqoi uning yuzasiga kiradimi? Qaysi qirralar payvandlanadi? Biz qopqoqli, asosining qirralari va bitta yon qirrasidan payvandlanadigan bakni ko‘rib chiqamiz (boshqa 3 ta yon qirra tunukani bukib hosil qilinadi). Masala mazmunini ko‘rsatmali tarzda ifoda etish uchun to‘ri burchakli parallelepiped sifatida bakning geometrik modeli tasvirlanadi.

Bizni qiziqtirayotgan kattaliklar – bak sirtining yuzasi, choklar uzunligi va yasash narxi. Talabalar uning yon yoqlari to‘g‘ri to‘rtburchaklar, asoslari kvadrat, chok uzunligi esa asoslar perimetrlari bilan yon qirra uzunligi yig’indisiga tengligini anglaydilar.

2. Matematik model tuzish (tanlash)

Qaralayotgan parallelepiped asos tomonining uzunligi a va balandligi h bilan bir qiymatli aniqlanadi. $V = a^2 h$ formulaga binoan,

$\boldsymbol{h = \frac{V}{a^2}}$ Shu sababli izlanayotgan kattalik sifatida asos tomonining uzunligini olish mumkin. Uni qulaylik uchun x bilan belgilaylik, sirt yuzasini $S(x)$, choklarning umumiy uzunligini $l(x)$, yasash nar’ini $C(x)$ bilan belgilaylik.

U holda quyidagilarni yozish mumkin:

$$S(x) = 2x^2 + \frac{4V}{x}; \qquad l(x) = 8x + \frac{V}{x^2};$$

$$C(x) = \alpha l(x) + \beta S(x) = \alpha\left(8x + \frac{V}{x^2}\right) + \beta\left(2x^2 + \frac{4V}{x}\right)$$ qavslarni ochib,

$$C(x) = 2\beta x^2 + 8\alpha x + \frac{4\beta V}{x} + \frac{\alpha V}{x^3}$$ hosil qilamiz.

Demak, masala matematika «til»ida quyidagicha eotirof etiladi: shunday nuqtani topish kerakki, bu nuqtada $C(x)$ $(0 < x < \infty)$ butun funksiya eng kichik qiymatni qabul qilsin

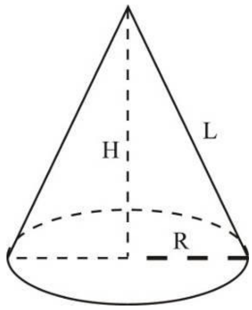
13-masala. Bir to'p shag'al konus shaklida bo'lib, asosining radiusi 2 m, yasovchisi esa 2,5 m. Bu to'p shag'alning yon sirti va to'la sirtini toping.

Berilgan: Konus

$R = 2м$

$L = 2,5м$

$S_{yon}, S_{to'la}$?



Yechish:

$S_{yon} = \pi RL$

$S_{to'la} = S_{yon} + S_{asos}$

$S_{asos} = \pi R^2$

$S_{yon} = \pi \cdot 2 \cdot 2.5 = 5\pi$

$S_{asos} = \pi \cdot 2^2 = 4\pi$

$S_{to'la} = 5\pi + 4\pi = 9\pi$

Javob: $S_{yon} = 5\pi,\ S_{to'la} = 9\pi$

14-masala. Konusning o'q kesimi yuzi $9m^2$ ga teng bo'lgan teng yonli to'g'ri burchakli uchburchakdan iborat, konusning yon sirtini toping.

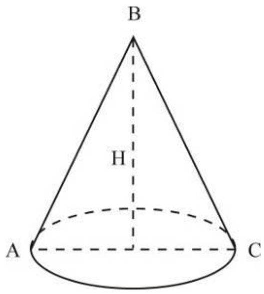
Berilgan: Konus

$S_{ABC} = 9m^2$

$AB = BC$

$\angle B = 90^0$

$S_{yon} = ?$



$S_{yon} = \pi RL$

$S = \frac{1}{2} AB \cdot BC$

$9 = \frac{1}{2} AB^2$

$18 = AB^2$

$AB = 3\sqrt{2}$

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$AC^2 = 36$

$AC = 6$

$R = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$

$S_{yon} = \pi \cdot 3 \cdot 3\sqrt{2} = 9\sqrt{2}\pi$

Javob: $S_{yon} = 9\sqrt{2}\pi$

15-masala (muhandislarga). Agar bir kvadrat metrni bo'yash uchun 200 g bo'yoq kerak bo'lsa, asosining diametri 1,5 m va balandligi 3 m bo'lgan silindr shaklidagi bakni bo'yash uchun qancha bo'yoq kerak bo'ladi?

Yechish. $S_{sil.} = d\pi(r+h) = 1,5\pi(0,75+3) = 5,625\pi; \quad 5,625\pi \cdot 200 = 1125\pi$

Javob: 1125π g.

GLOSSARI

1	“Matematika”	grekcha so`z (mathema) bo`lib, «bilim,fan» demakdir
2	“Metodika”	grekcha so`zdan olingan bo`lib, «metod»-yo`l demakdir
3	Tajriba metodi	matematik ob'ektdagi narsalarning xossalari va ular orasidagi miqdoriy munosabatlarni sun'iy ravishda bo`laklarga ajratish yoki ularni birlashtirish metodidir
4	Analogiya	taqqoslanayotgan ob'ektlarning xususiy xossalari o`xshashligiga asoslangan tasdiq bo`lib taxlil qilish natijasida xosil qilinadi
5	Umumlashtirish	bu o`rganilayotgan ob'ektlarning umumiy muxim tomonlarini ularning muxim emas tomonlaridan ajratishdan iborat.
6	Abstraktsiyalash	– urganilayotgan ob'ektdagi narsalarning muxim belgilarini, sifat yoki xususiyatlarini mustakil fikr ob'ektiga aylantirishdan iborat tafakkur operatsiyasidir
7	Muammoli ta'lim metodi	muammoli vaziyatni xal kilish asosida xosil kilingan dars jarayoni metodiga aytiladi
8	Aksioma	grekcha «xurmat, extirom, obru» ma'nosini bildirib, matematik nazariya yaratishda boshlangich asos deb karaladigan va isbotsiz kabo`l kilinadigan jumla
9	Teorema	grekcha so`z bo`lib, uning lug`aviy ma’nosi "qarab chiqaman" yoki «o`ylab ko`raman» demakdir, shuning uchun ham maktab matematika kursida teoremaga quyidagicha ta’rif berilgan: "Isbotlashni talab etadigan matematik hukm teorema deyiladi
10	To’plam	To’plam tushunchasi matematikaning boshlang‘ich tushunchalark bo‘lib, u ta’rifsiz qabul qilinadi.
11	To’plam elementi	To‘plamni tashkil qiluvchi obyektlar uning elementlari deyiladi.
12	To’plamlar ustida	Birlashma, kesishma, ayirma amallari mavjud.
13	O’z ichiga olmoq	A to’plam a ni o’z ichiga oladi <=> $a \in A$
14	Qism to’plam	Agar A to’plamning xar bir elementi B to’plamning ham elementi bo’lsa, A to’plam B to’plamning to’plamostisi deyiladi va $A \subset B$ yoki $A \subseteq B$ orqali belgilanadi.
15	Birlashma	A va B to’plamlarning kamida biriga tegishli bo’lgan barcha elementlardan tashkil topgan $A \cup B$ to’plam A va B to’plamlarning birlashmasi yoki yig’indisi deyiladi.
16	Ayirma	A va B to’plamlarning ayirmasi deb, A to’plamning B to’plamga kirmagan barcha elementlardan tashkil topgan

		to'plamga aytiladi va A \ B yoki A-B ko'rinishlarda belgilanadi.
17	Bo'sh to'plam	Birorta ham elementga ega bo'lmagan to'plamga aytiladi va u $\varnothing$ orqali belgilanadi.
18	Kesishma	A va B to'plamlarning kesishmasi yoki ko'paytmasi deb, A va B to'plamlarning barcha umumiy, ya'ni A ga ham, B ga ham tegishli elementlardan tashkil topgan $A \cap B$ to'plamga aytiladi.
19	Mulohaza	matematik mantiqning asosiy tushunchalaridan bo'lib, u rost yoki yolg'onligi bir qiymatli aniqlanadigan darak gapdir.
20	Mulohazalarning kon'yunksiyasi.	A va V mulohazalar rost bo'lgandagina rost bo'lib, qolgan hollarda yolg'on bo'ladigan mulohaza A va V mulohazalarning kon'yunksiyasi deyiladi va A $\wedge$ V yoki A & V ko'rinishda belgilanadi
21	Mulohazalar diz'yunksiyasi.	A va V mulohazalar diz'yunksiyasi deb, A va V mulohazalarning ikkalasi ham yolg'on bo'lgandagina yolg'on, qolgan hollarda rost bo'ladigan A $\vee$ V mulohazaga aytiladi.
22	Mulohazalar implikasiyasi	A va V mulohazalar implikasiyasi deb, A mulohaza rost va V mulohaza yolg'on bo'lgandagina yolg'on, qolgan hollarda rost bo'ladigan A $\rightarrow$ V mulohazaga aytiladi.
23	Mulohazalar ekvivalensiyasi.	A va V mulohazalar ekvivalensiyasi deb, A va V mulohazalarning ikkalasi ham yolg'on yoki rost bo'lganda rost, qolgan hollarda yolg'on bo'ladigan A $\leftrightarrow$ V mulohazaga aytiladi
24	Determinant	Kvadrat matritsaning har bir satr va har bir ustunidan bittadan elementlar olib tuzilgan ko'paytmalarning algebraik yig'indisiga berilgan kvadrat matritsaning determinanti deyiladi.
25	Sonni Determinantga ko'paytirish	A kvadrat matritsaning biror bir satr (ustun) elementlarini noldan farqli λ skalyarga ko'paytirilsa, u holda A matritsaning determinanti λ skalyarga ko'paytiriladi.
26	Matritsa	a_{ik} haqiqiy sonlar m ta satr va n ta ustunda joylashgan quyidagi to\`g\`ri to\`rtburchak $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{n2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}=(a_{ij})$ shaklidagi jadvalga m x n o\`lchamli matritsa deyiladi.
27	Birlik matritsa	- diagonal elementlari 1 ga, qolgan elementlari nolga teng bo'lgan matritsa

28	Transponirlangan matritsa	- ustunni satr, satrini ustun qilib yozishdan xosil bo‘lgan matritsa
29	Kvadrat matritsa-	ustun va satrlari soni teng bo‘lgan matritsa
30	Vektor	Uzunliklari teng yo’nalishi bir xi lbo’lgan barcha yo’nalgan kesmalar to’plamini ozod vector yoki qisqacha vektor deb ataladi.
31	Nolvektor	Boshi bilan oxiri ustma – ust tushgan vector nol vector deyiladi.
32	Teng vektorlar	Agar quyidagi shartlar o’rinli bo’lsa: 1) $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning modullari teng; 2) $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yo’nalishlari bir xil bo’lsa, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni teng vektorlar deyiladi va $\vec{a} = \vec{b}$ ko’rinishida yoziladi.
33	Ekstsentrisitet.	Ellipsning fokuslari orasidagi masofaning ellipsning katta o`qi uzunligiga nisbati shu ellipsning deb ataladi. Ekstsentrisitet e harfi bilan belgilanadi.
34	Direktrisa.	Ellips ning berilgan F fokusga mos direktrisasi deb, uning fokal o’qiga perpendikulyar va markazdan shu F fokus yotgan tomonda $\frac{a}{e}$ masofada turuvchi to’q’ri chiziqqa aytiladi.
35	Giperbola.	Tekislikda har bir nuqtasidan fokuslar deb ataluvchi F_1 va F_2 nuqtalargacha bo`lgan masofalar ayirmasining absolyut qiymati berilgan kesma uzunligiga teng bo`lgan nuqtalarning geometrik o`rniga giperbola deb ataladi.
36	Ayniy shakl almashtirish	- bir ifodani unga aynan teng bo`lgan boshqa ifodaga almashtirishdir.
37	Funksiya	X to`plamning har bir x elementiga Y to`plamning yagona y elementi mos kelsa, u holda y element x ning funksiyasi deyiladi va y=f(x) ko`rinishda yoziladi
38	Hosila	umumiy holda funksiyaning (argumentga nisbatan) o`zgarish tezligidir
39	Boshlang`ich funksiya	berilgan intervalda berilgan f(x) funksiya uchun Φ`(x) = f(x) shartni qanoatlantiruvchi Φ(x) funksiyadir
40	Hosilaning geometrik ma`nosi	funksiyaning biror nuqtasiga o`tkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyentini topish
41	Hosilaning fizik ma`nosi	nuqtaning harakati S=f(t) funksiya bilan ifodalansa, uning oniy tezligi v s=f(t) funksiyadan, ya`ni yo`ldan vaqt bo`yicha olingan hosiladir

42	Kasb	inson mehnat faoliyati mahsuli bo'lib, maxsus kompleks tayyorlash davrida va ish tajribalari asosida egallagan nazariy bilim, amaliy ko'nikma va malakalar majmuidir
43	Malaka	kishi egallagan bilimlari ko'nikma bosqichidan o'tib, doimiy harakat turiga aylanishi, mahorat hosil qilishi
44	Mahorat	- o'zlashtirilgan bilimlar va hayotiy tajribalar asosida barcha amaliy harakatlarni (shu jumladan dars berishni) kam kuch va kam vaqt sarflab bajarish
45	Kasbiy moslashish	ishlab chiqarishda kasbiy faoliyatning ijtimoiy-psixologik va tashkiliy-texnik sharoitlariga shaxsni moslashtirishga, uni muvoffaqiyatli ravishda kasbni egallashi uchun shart sharoitlarni yaratishga yo'naltirilgan choralar kompleks.
46	Kasb ma'suliyati	shaxs kasbiy faoliyatining kasb burchiga muvofiqligidir
47	Loyihalash	oldindagi faoliyat modelini tuzish, mavjud sharoitlarda o'rnatilgan vaqt mobaynida yo'l va vositalarni tanlash uchun, maqsadga erishish bosqichlarini ajratish, ular uchun alohida vazifalarni shakllantirish, o'quv axboroti va qaytar aloqani yetkazish vositasi va yo'llarini aniqlash
48	Texnologik jarayon	ishlab chiqariladigan mahsulotga ishlov berishning yagona jarayonini hosil qiluvchi texnologik operatsiyalar yig'indisi.

Foydalaniladigan adabiyotlar:

1. Soatov Yo.U. Oliy matematika asoslari. O'qituvchi. T-1992-95y
2. Azlarov T.A. Mansurov X.Matematik analiz.1-2 qism. O'qituvchi. T-1989-94y
3. Jurayev T., Sa'dullayev A. va boshqalar. Oily matematika asoslari.1-2 qism. O'zbekiston. T-1995.
4. Tojiyev Sh.I. Oliy matematika asoslaridan masalalar yechish. O'zbekiston. T-2002.
5. Danko P.E., Popov A.G. va boshqalar. Oliy matematika misol va masalalarda.T-2003.
6. Claudio Canuto, Anita Tabacco. Mathematical Analysis I, II. Springer-Verlag Italia, Milan 2008, 2010.
7. Д.Писменный. «Конспект лекции по высшей математике», 1,2,3 часть. - Москва: Айрис Пресс, 2009 г.
8. Xurramov Sh.R.Oliy matemarika. T.: "Tafakkur",1-jild, 2-jild, 2018.

Axborot manbalari (saytlar):

1. http://lib.mexmat.ru;
2. http://www. mcce.ru,

3. http://lib.mexmat.ru
4. www.ziyonet.uz
5. bbbbwww.exponenta.ru